

# MODELISATION NUMERIQUE DE L'IMPACT DES PARAMETRES HYDRAULIQUES ET NUMERIQUES SUR LA LOCALISATION DU RESSAUT HYDRAULIQUE

M. A. HAFNAOUI<sup>(1,2)</sup>, M. DEBABECHE<sup>(1)</sup>, R. F. CARVALHO<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup>Laboratoire de Recherche en Génie Civil, Hydraulique, Développement Durable et Environnement-LARGHYDE- Université de Biskra

<sup>(2)</sup>Centre de Recherche Scientifique et Technique sur les Régions Arides -CRSTRA- Biskra

<sup>(3)</sup>Centre des Sciences Marin et de l'Environnement -MARE-Université de Coimbra

## RESUME

La détermination de la localisation du ressaut hydraulique par la modélisation numérique est soumise à plusieurs paramètres. Dans cet article il sera étudié l'impact de ces paramètres sur la localisation du ressaut hydraulique tels que : le changement de la rugosité  $n$ , le changement du coefficient de Boussinesq  $\beta$  et le changement du pas d'espace  $\Delta x$ . Il a été utilisé deux modèles numériques, le premier est basé sur le schéma classique de MacCormack et le second repose sur l'extension TVD de haute résolution. Les résultats obtenus donnent de bonnes localisations pour le deuxième modèle, l'effet du changement de la rugosité et du coefficient de Boussinesq sont plus importants que celui du changement du pas d'espace  $\Delta x$ . Cette étude est basée essentiellement sur les essais expérimentaux réalisés par Gharangik et Chaudhry.

**MOTS CLES:** Localisation du ressaut hydraulique, le schéma de MacCormack, l'extension TVD, les équations de Barré Saint-Venant, Canal rectangulaire.

## ABSTRACT

The location of the hydraulic jump calculation by the numerical modeling depends on several parameters. In this paper it is studied the impact of these parameters on the location of the hydraulic jump such as: the change of the roughness coefficient  $n$ , the change of the Boussinesq  $\beta$  coefficient and the change of the mesh spacing  $\Delta x$ . Two numerical models are used, the first model is based on the classical scheme of MacCormack and the second is based on the high-resolution TVD extension. The results gave good location for the second one, and the effect of the roughness and the Boussinesq coefficient showed more influence than the effect change of the mesh spacing  $\Delta x$ . This study is based basically on the experimental tests achieved by Gharangik and Chaudhry.

**KEYWORDS:** Location of hydraulic jump, MacCormack scheme, TVD extension, Saint-Venant equations, rectangular channel.

## 1 INTRODUCTION

Le ressaut hydraulique est défini comme le passage de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial. Ce passage s'accompagne d'une perturbation de la surface libre de l'écoulement. Dans les dernières années le ressaut hydraulique a fait l'objet de plusieurs recherches expérimentales et numériques dans différents profils géométriques. Dans le domaine de l'expérimentation nous pouvons citer les travaux de, Hager et Bretz (1987), Hager (1992), Ead et Rajaratnam (2002), Chanson (2009), qui ont étudié le ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire horizontal. Hager et Wanoschek (1987), Achour et Debabeche (2003) et Debabeche et Achour (2007), qui ont examinés le ressaut hydraulique évoluant dans un canal triangulaire horizontal. Debabeche et al. (2009), ont étudié le ressaut hydraulique dans un canal triangulaire en pente.

Nous pouvons citer aussi les travaux dans le domaine numérique sur le ressaut hydraulique tels que les travaux de, Chow (1959), Abbott et al. (1969), Mc-Corquodale et Khalifa (1983), Gharangik et Chaudhry (1991), qui ont étudiés la localisation du ressaut hydraulique. En effet, Garcia-Navarro et al. (1992) ont appliqué l'extension de haute résolution TVD du schéma de MacCormack pour simuler l'écoulement non permanent dans des canaux rectangulaires et trapézoïdaux. Carvalho et al. (2008), ont étudié les caractéristiques du ressaut hydraulique en utilisant des simulations numériques basées sur les équations de Navier-Stokes, la méthode du volume de fluide (VOF) a été utilisée pour modéliser la turbulence et représenter la surface libre. Hafnaoui, Carvalho et Debabeche (2016), ont étudié numériquement la localisation du ressaut hydraulique dans quelques types de canaux prismatiques en appliquant l'extension de haute

résolution TVD du schéma de MacCormack, basée sur la résolution numérique des équations de Barré Saint-Venant.

Dans cette étude il sera analysé l'effet de quelques paramètres sur la localisation du ressaut hydraulique tels que : l'effet du changement du pas d'espace  $\Delta x$  ; l'effet du changement du coefficient de la quantité de mouvement ou le coefficient de Boussinesq  $\beta$  ; l'effet du changement du coefficient de Manning  $n$ . il a été utilisé deux modèles numériques développés en MATLAB®, le premier modèle basé sur le schéma classique de MacCormack et dans le deuxième modèle il a été ajouté l'extension TVD du schéma classique de MacCormack. Cette étude est basée principalement sur les données expérimentales de Gharangik et Chaudhry (1991) qui ont étudiés la simulation numérique du ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire.

## 2 MODELISATION MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE

Les équations de Barré Saint-Venant sont composées par les équations de la conservation de masse et la conservation de quantité de mouvement. Le système d'équations de Barré Saint-Venant peut s'écrire comme suit (Freitag et Morton, 2007) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} + gI_1 \right) = gI_2 + gA(S_0 - S_f) \quad (2)$$

avec,

A: la surface d'écoulement; Q: le débit ; t: temps ; x: abscisse dans l'espace ;  $I_1$ : terme correspondant aux forces de pression agissant sur les sections extrêmes;  $I_2$ : terme correspondant aux forces de pression agissant sur les parois latérales; g: accélération de la pesanteur;  $S_f$ : perte de charge;  $S_0$ : la pente du canal et  $\beta$  : coefficient de la quantité de mouvement ou le coefficient de Boussinesq. Pour un écoulement idéal la valeur de  $\beta = 1$ .

La pente du canal  $S_0$  est donnée comme suit :  $S_0 = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , avec  $\xi$  : le niveau de l'élévation du canal.

La perte de charge unitaire  $S_f$  peut s'écrire par l'expression de Manning Strickler, comme suit :

$$S_f = \frac{n^2 |Q| Q}{A^2 R^{4/3}} \quad (3)$$

où,

$n$  est le coefficient de rugosité de Manning et  $R$  le rayon hydraulique.

Le schéma de MacCormack est une partie de la méthode de différence finie explicite de deux étapes de calcul, basé sur le schéma de Lax-Wendroff qui résulte de l'expansion de second ordre de la série de Taylor dans le temps. La combinaison entre les discrétisations temporelles et spatiales assure la précision du second ordre dans l'espace et le temps (Carmo, 2009).

Pour l'application de la méthode de MacCormack, le système des équations de Saint-Venant peut s'écrire sous la forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (4)$$

où,

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} A \\ Q \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} Q \\ \frac{\beta Q^2}{A} + gI_1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{Bmatrix}; \quad (5)$$

avec,

$\mathbf{U}$  : le vecteur écoulement ;  $\mathbf{F}$  : le vecteur flux et  $\mathbf{S}$  : vecteur source.

Le schéma de MacCormack est un schéma de deux-étape de calcul explicite, qui est, initialement un calcul basé sur les valeurs des variables dans l'instant précédent (prédiction) et ensuite une étape de correction basé sur les valeurs prédites (correction).

Etape de Prédiction

$$U_i^{(1)} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1}^n - F_i^n] + \Delta t S_i^n \quad (6)$$

Etape de Correction

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ U_i^n + U_i^{(1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^{(1)} - F_{i-1}^{(1)}) + \Delta t S_i^{(1)} \right] \quad (7)$$

Pour la stabilité du schéma de MacCormack, il est nécessaire de vérifier la condition de stabilité Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\Delta t = C_n \frac{\Delta x}{\max(|U| + \sqrt{gy})} \quad (8)$$

Avec  $C_n$  est le Nombre de Courant.

La résolution des équations de Barré Saint-Venant par le schéma de MacCormack peut survenir des oscillations numériques. Pour réduire ces oscillations, une extension de haute résolution basée sur la théorie de TVD (Total Variation Diminishing) pourrait être introduite dans le schéma de MacCormack, ce qui conduit à un modèle plus robuste. L'extension TVD du schéma de MacCormack classique peut s'écrire comme suit:

$$U_i^{n+1} = U_i^{(2)} + \left( \tilde{R}_{i+\frac{1}{2}} \tilde{D}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{R}_{i-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (9)$$

Dans laquelle ;  $\tilde{R}$  est une matrice correspondant à la jacobéenne approchée, et  $\tilde{D}$  est une fonction de vecteur. Les détails pourraient être trouvés dans (Garcia-Navarro et al., 1992), des travaux qui ont étudié le rôle de l'extension TVD du schéma de MacCormack pour la réduction des oscillations résultant de la méthode classique de

MacCormack. Cette étude a été faite dans des canaux rectangulaires et trapézoïdaux avec pente et présence de ressaut hydraulique. Après une comparaison entre un schéma classique de MacCormack et l'extension TVD, les résultats ont montré une efficacité pour minimiser les oscillations par l'extension TVD du schéma de MacCormack.

### 3 PROCEDURE EXPERIMENTALE

Les essais expérimentaux ont été faits par Gharangik et Chaudhry dans un canal rectangulaire horizontal en métal a une longueur de 14 m et largeur de 0,46 m. La distance  $x = 0,305$  m représente un point de référence pour les mesures. Les valeurs du coefficient de rugosité  $n$  varient entre 0,008 et 0,011. Le pas d'espace  $\Delta x$  a été varié de 0,15 m à 0,6 m. Le temps d'essai final a été estimé de 150 secondes et la gamme de nombres de Froude obtenu varie de 2,30 à 7,0. Les détails pourraient être trouvés dans Gharangik et Chaudhry (1991). Nous avons choisi l'un des essais expérimentaux effectués dans le laboratoire pour un nombre de Froude  $F_1 = 4,23$ . Les mesures expérimentales du profil de surface du ressaut hydraulique sont représentées dans le tableau (1).

Tableau 01: Mesure de profil de surface du ressaut hydraulique pour  $F_1 = 4,23$

Distance x (m)	Profondeur h (m)	Distance x (m)	Profondeur h (m)
0,30	0,043	2,44	0,232
0,61	0,043	2,74	0,229
0,91	0,046	3,05	0,226
1,22	0,049	3,35	0,223
1,52	0,055	3,66	0,223
1,83	0,152	3,96	0,223
2,13	0,207	4,27	0,223

### 4 ANALYSES ET RESULTATS

Pour cette analyse on va étudier les changements : du pas d'espace  $\Delta x$ , le coefficient de la quantité de mouvement ou le coefficient de Boussinesq  $\beta$ , le coefficient de Manning  $n$  ; et faire une comparaison entre ces paramètres et le profil de surface des mesures expérimentales du ressaut hydraulique. Il sera utilisé dans un premier temps le schéma de MacCormack classique, et dans un deuxième temps le schéma de MacCormack avec l'extension de haute résolution TVD.

#### 4.1 L'EFFET DU CHANGEMENT DU PAS D'ESPACE

Gharangik et Chaudhry (1991) ont proposé que le pas

d'espace  $\Delta x$  est varié entre 0,15 m et 0,6 m. Pour étudier l'effet du changement du pas d'espace  $\Delta x$  sur la localisation du ressaut hydraulique, nous avons proposé trois pas d'espace ;  $\Delta x = 0,15$  (m),  $\Delta x = 0,3$  (m) et  $\Delta x = 0,5$  (m). La figure (1) montre les profils du ressaut hydraulique pour les trois pas d'espace proposés et le profil de l'essai expérimental.

Dans cette simulation nous avons utilisé le schéma de MacCormack classique, le coefficient de Manning  $n = 0,008$  et le temps final du test  $t = 150$  s

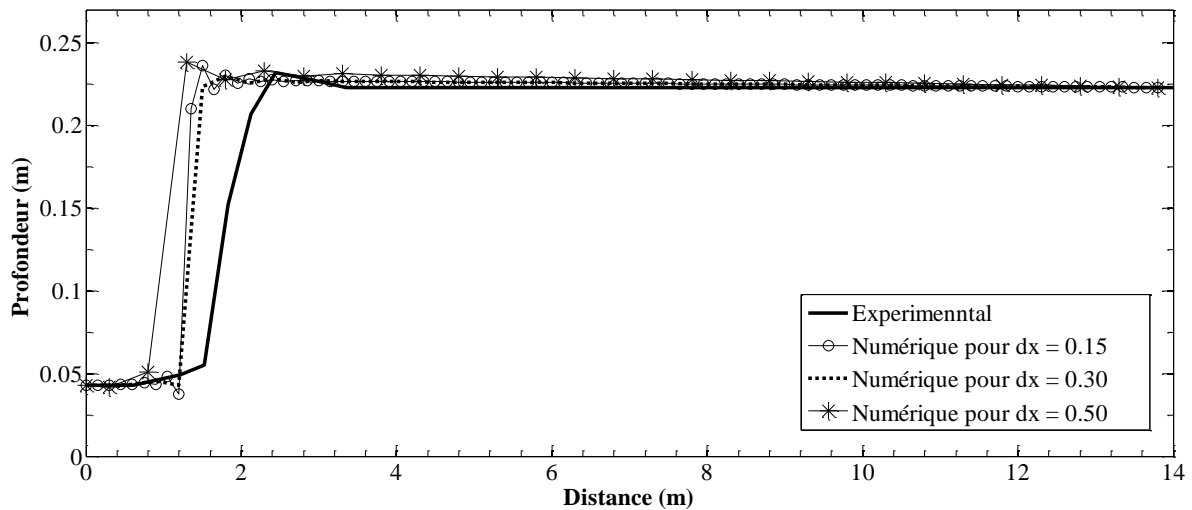


Figure 01: Profil du ressaut hydraulique pour  $F_1 = 4,23$

On remarque que pour tous les pas d'espace proposés le ressaut hydraulique se forme à l'amont du profil de l'essai expérimental. La simulation numérique pour le pas d'espace  $\Delta x=0,3$  est plus stable.

La mauvaise localisation du ressaut hydraulique nous a conduit à tester d'autres paramètres tel que le coefficient de Boussinesq  $\beta$ . Les valeurs du nombre de Courant  $C_n$  pour ces simulations varient entre 0,45 et 0,56.

#### 4.2 L'EFFET DU CHANGEMENT DU COEFFICIENT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Pour étudier l'effet du changement de coefficient de Boussinesq sur la localisation du ressaut hydraulique, nous avons testé trois valeurs de ce coefficient;  $\beta = 1,03$ ;  $\beta = 1,05$  et  $\beta = 1,07$ . Les figures (2), (3) et (4) montrent respectivement les profils du ressaut hydraulique pour les pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m); 0,3 (m) et 0,5 (m), le coefficient de Manning  $n = 0,008$  et le temps final du test  $t = 150$  s.

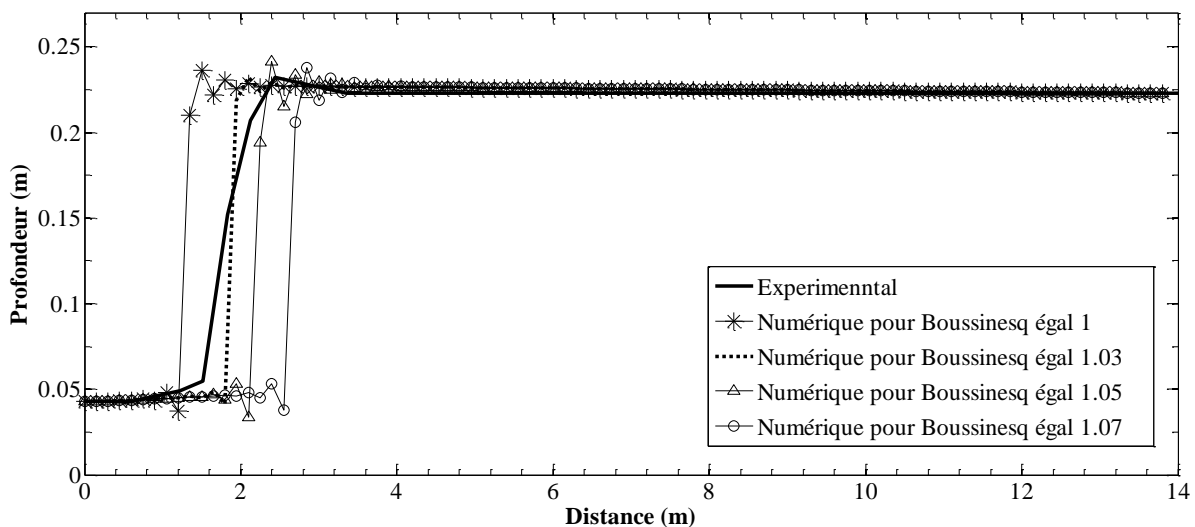
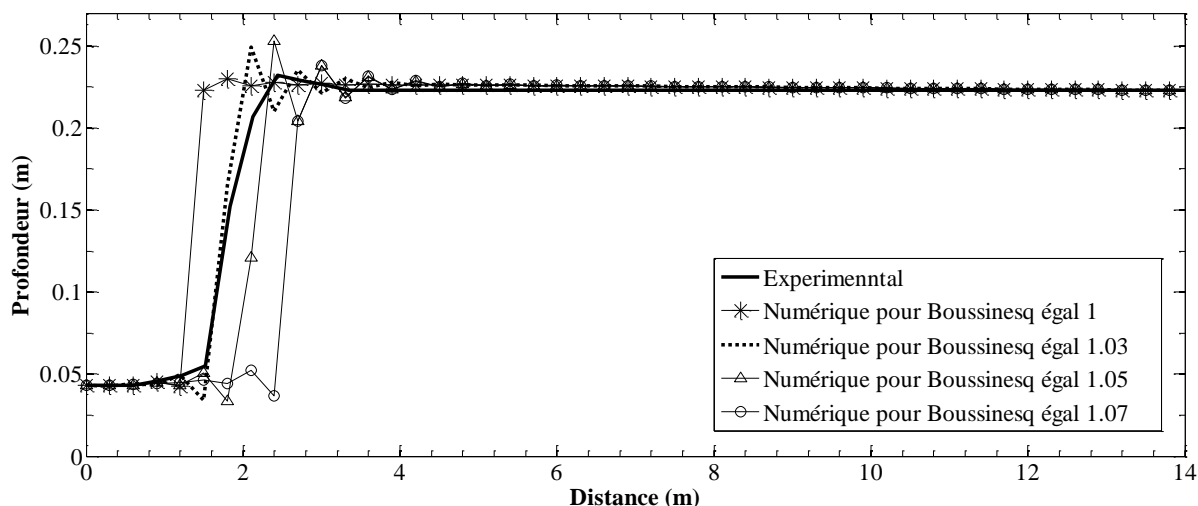
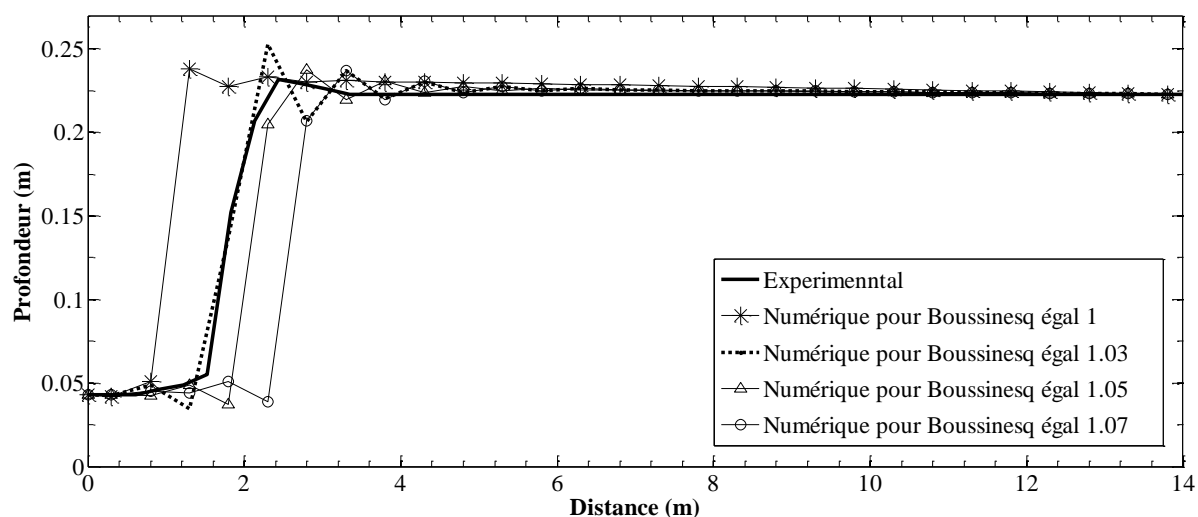


Figure 02: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,15$  (m)


 Figure 03: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,3$  (m)

 Figure 04: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,5$  (m)

On remarque qu'il y a un déplacement du ressaut hydraulique vers l'aval à chaque fois qu'on augmente la valeur du coefficient de Boussinesq, le profil du ressaut hydraulique pour le coefficient de Boussinesq  $\beta = 1,03$  donne une bonne localisation du ressaut hydraulique par rapport au profil d'essai expérimental. On remarque aussi que le profil du ressaut hydraulique pour le pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m) est plus stable par rapport aux autres pas d'espace. Les valeurs du nombre de Courant  $C_n$  pour ces simulations varient entre 0,45 et 0,56.

#### 4.3 L'EFFET DU CHANGEMENT DU COEFFICIENT DU MANNING

Pour étudier l'effet de la rugosité  $n$  sur la localisation du ressaut hydraulique, nous avons changé la valeur du coefficient de Manning  $n$  de 0,008 à 0,009 pour tous les pas d'espace et les valeurs du coefficient de Boussinesq proposés. Les figures (5), (6) et (7) montrent respectivement les profils du ressaut hydraulique pour les pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m), 0,3 (m) et 0,5 (m). Le temps final du test  $t = 150$  s.

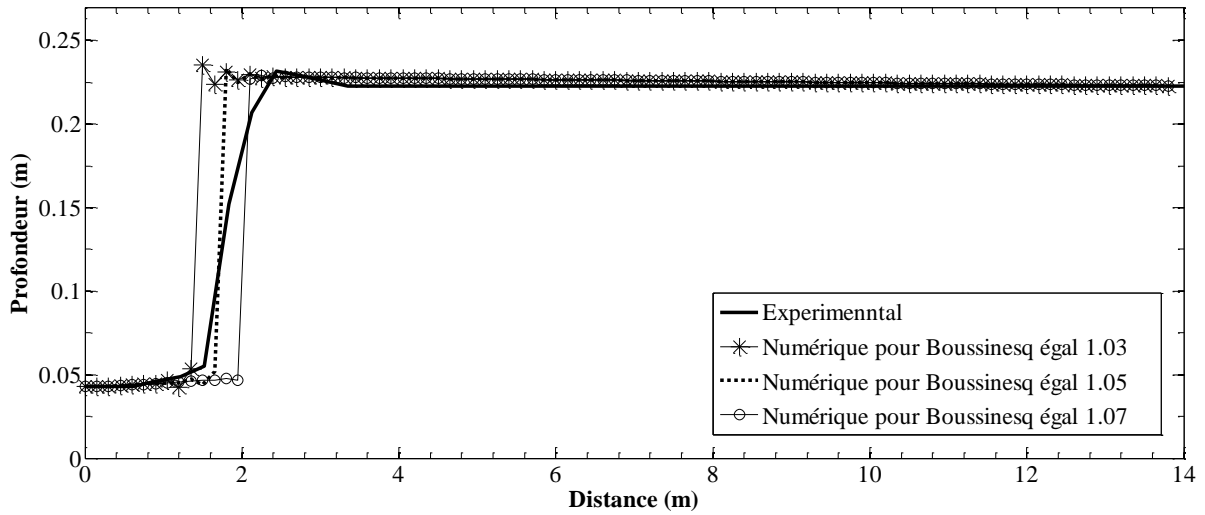


Figure 05: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,15$  (m)

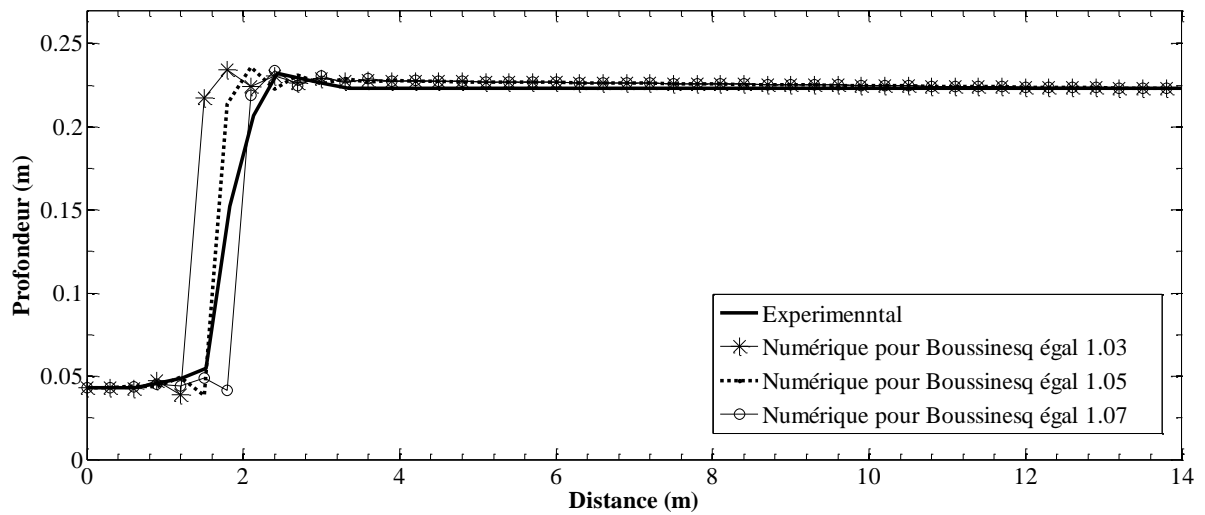


Figure 06: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,3$  (m)

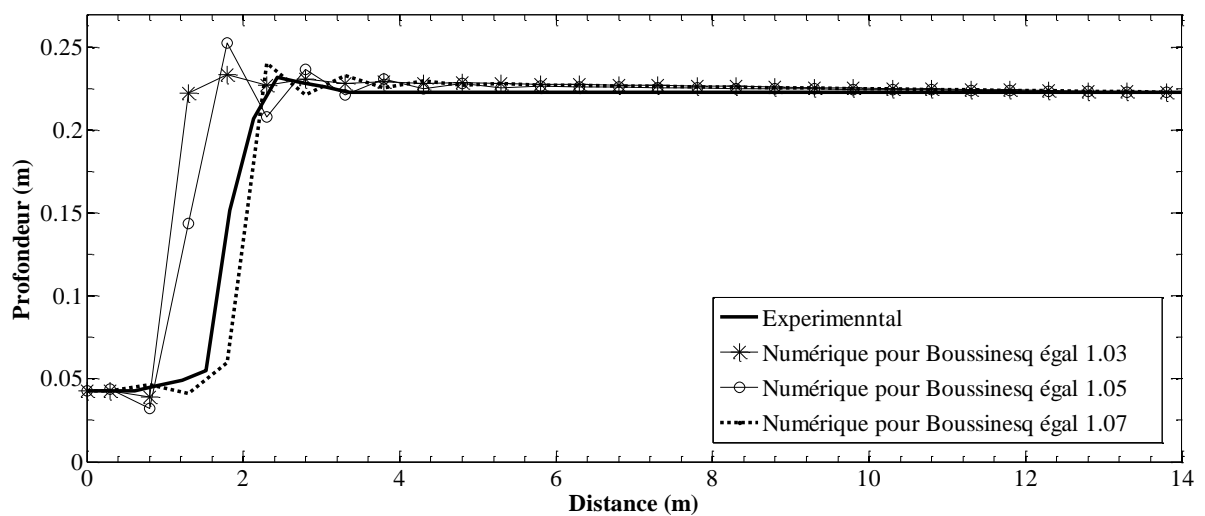


Figure 07: Profil du ressaut hydraulique pour  $\Delta x = 0,5$  (m)

On remarque qu'il y a un déplacement du ressaut hydraulique vers l'amont avec l'augmentation de la valeur du coefficient de Manning  $n$ . Le profil du ressaut hydraulique pour le pas d'espace  $\Delta x = 0,5$  (m) et le coefficient de Boussinesq  $\beta = 1,07$  donne une bonne localisation du ressaut hydraulique par rapport au profil d'essai expérimental. Les valeurs du nombre de Courant  $C_n$  pour ces simulations varient entre 0,45 et 0,53.

#### 4.4 UTILISATION DE L'EXTENTION TVD DU SCHEMA DE MACCORMACK

L'extension TVD du schéma de MacCormack joue un rôle

important pour minimiser les oscillations de la simulation numérique au niveau de la surface d'écoulement. Nous avons ajouté l'extension TVD au schéma classique de MacCormack pour voir l'effet de ce schéma sur la formation du profil du ressaut hydraulique. Pour cette étude nous avons utilisé trois pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m),  $\Delta x = 0,3$  (m) et  $\Delta x = 0,5$  (m) dans un premier temps. Dans un deuxième temps nous avons varié le coefficient de Manning  $n$  de 0,008 à 0,01, le coefficient de Boussinesq  $\beta$  égal à l'unité. Les valeurs du nombre de Courant  $C_n$  varient entre 0,23 et 0,30 et le temps final du test  $t = 150$  s. Les figures (8), (9) et (10) montrent respectivement les profils du ressaut hydraulique des pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m), 0,3 (m) et 0,5 (m) pour les coefficients de Manning  $n = 0,008$  ; 0,009 et 0,01.

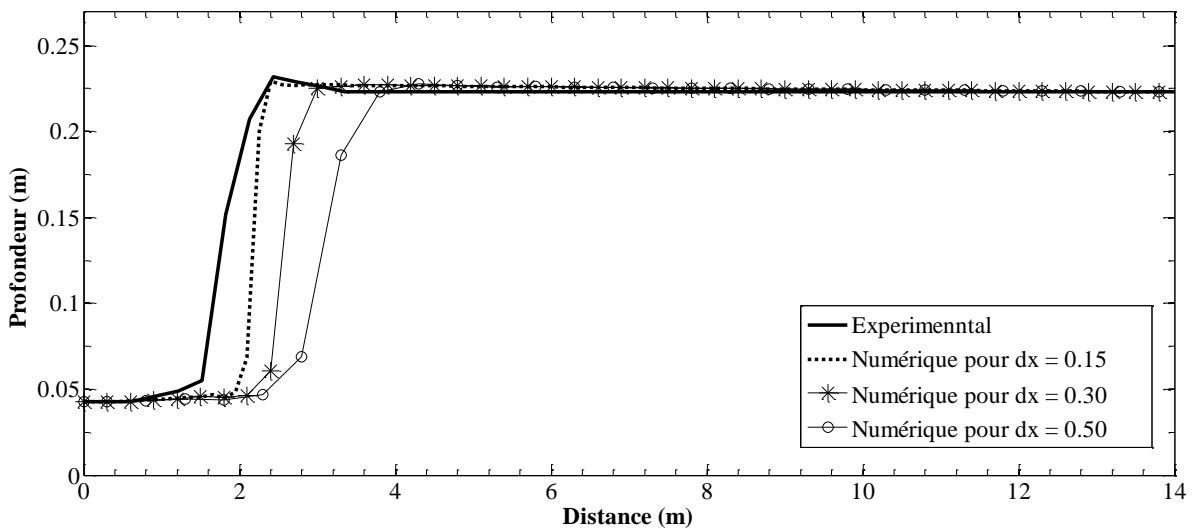


Figure 08 : Profil du ressaut hydraulique pour  $n = 0,008$

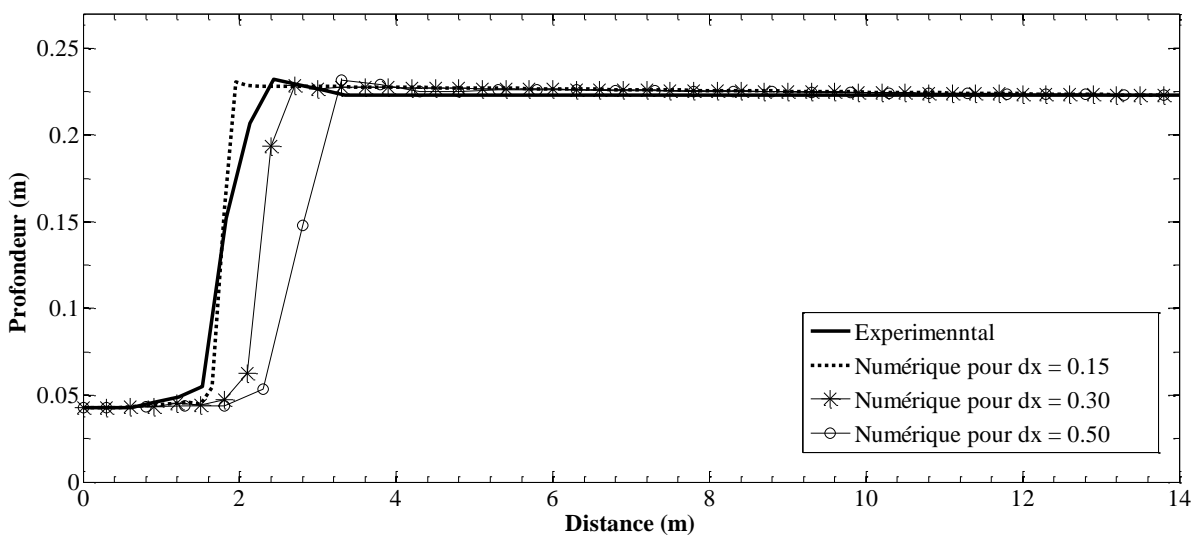


Figure 09 : Profil du ressaut hydraulique pour  $n = 0,009$

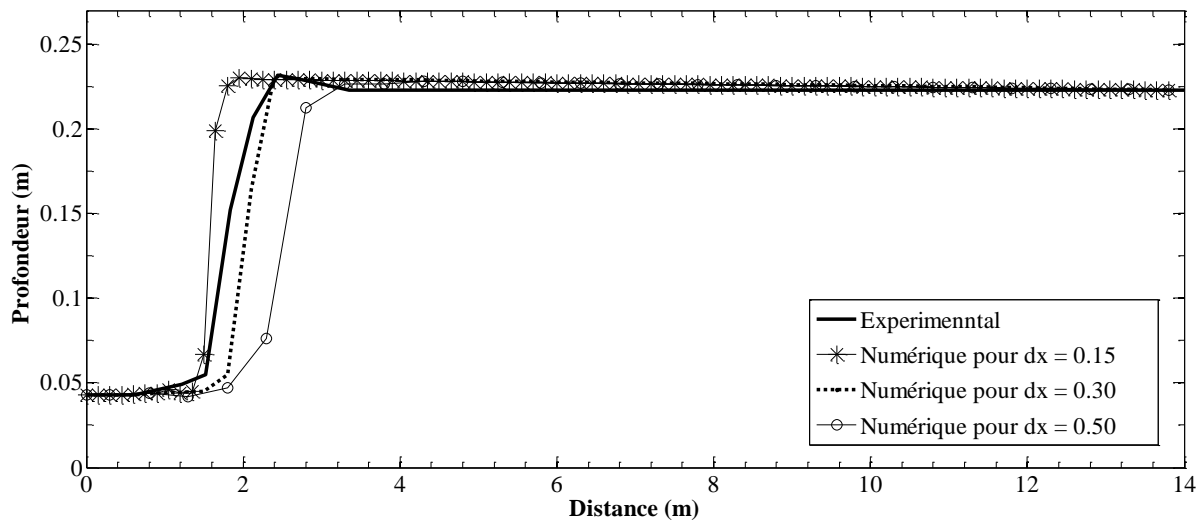


Figure 10 : Profil du ressaut hydraulique pour  $n = 0,01$

On remarque qu'il y a une stabilité dans les profils du ressaut hydraulique, les oscillations au niveau de la surface d'écoulement sont minimisées. On remarque aussi que pour le coefficient de Manning  $n = 0,008$  tous les profils du ressaut hydraulique se déplacent vers l'aval du profil de l'essai expérimental. Avec l'augmentation du coefficient de rugosité  $n$  les profils du ressaut hydraulique se déplacent vers l'amont.

Les profils du ressaut hydraulique pour le pas d'espace  $\Delta x = 0,15$  (m) et le coefficient de Manning  $n = 0,009$  ; et pour le pas d'espace  $\Delta x = 0,3$  (m) et le coefficient de Manning  $n = 0,01$  donnent des bonnes localisations par rapport au profil de l'essai expérimental.

## 5 VARIATION DU PROFIL DE SURFACE EN FONCTION DU TEMPS

Pour voir la formation du profil de surface du ressaut hydraulique avec le temps de test, nous avons choisi la simulation numérique du pas d'espace  $\Delta x = 0,3$  (m), le coefficient de Manning  $n = 0,01$ , le coefficient de Boussinesq  $\beta = 1$ , la valeur du nombre de Courant  $C_n = 0,27$ , et le temps final du test  $t = 150$  s, du schéma de MacCormack de haute résolution TVD.

La figure (11) montre la formation du profil de surface d'eau à différents temps pour le nombre de Froude  $F_1 = 4,23$ . Le ressaut se déplace de l'extrémité aval vers l'extrémité amont, puis il revient à l'aval et se stabilise dans un seul endroit.

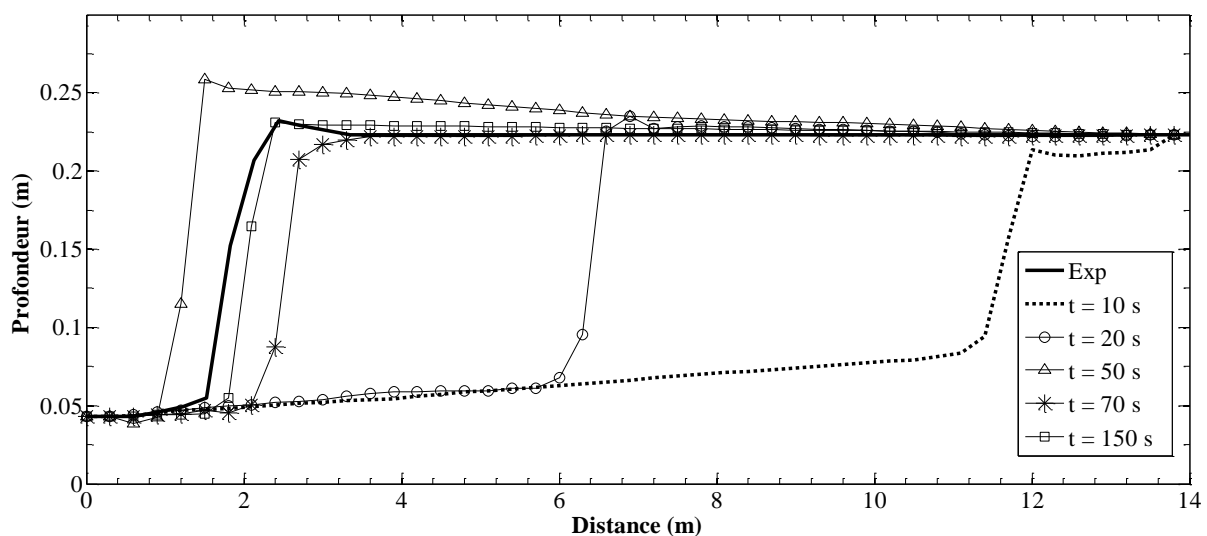


Figure 11 : Profil de surface d'eau à différents temps



## 6 CONCLUSION

Dans cette étude nous avons analysé numériquement la localisation du ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire à partir des données des essais expérimentaux réalisés par Gharangik et Chaudhry (1991). Pour la simulation numérique du ressaut hydraulique nous avons utilisé deux schémas numériques, le premier est le schéma classique de MacCormack et le deuxième est le schéma de MacCormack avec l'extension TVD.

Trois paramètres ont été étudiés pour cette analyse : L'effet du changement du pas d'espace  $\Delta x$  ; L'effet du changement du coefficient de la quantité de mouvement (ou le coefficient de Boussinesq  $\beta$ ) et L'effet du changement du coefficient de Manning  $n$ .

Les résultats obtenus montrent que les trois paramètres ont une influence directe sur le déplacement du ressaut hydraulique. L'augmentation du coefficient de Boussinesq  $\beta$  favorise le déplacement du profil du ressaut hydraulique vers l'aval par contre l'augmentation du coefficient de Manning  $n$  pousse le profil du ressaut hydraulique vers l'amont. L'effet du pas d'espace  $\Delta x$  est relativement négligeable par rapport aux deux autres paramètres.

L'utilisation du schéma de MacCormack avec l'extension TVD minimise les oscillations sur la surface d'écoulement et donne une bonne localisation du ressaut hydraulique.

## NOTATIONS

A: Surface d'écoulement [ $m^2$ ]

Q: Le débit [ $m^3/s$ ]

h: Profondeur d'écoulement [m]

t: Temps [s]

x: Abscisse dans l'espace

$I_1$ : Terme correspondant aux forces de pression agissant sur les sections extrêmes

$I_2$ : Terme correspondant aux forces de pression agissant sur les parois latérales

$S_f$ : Perte de charge [m]

g: Accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]

$S_0$ : Pente du canal

$\xi$ : Niveau de l'élévation du canal [m]

$\beta$ : Coefficient de la quantité de mouvement ou le coefficient de Boussinesq

$n$ : Coefficient de rugosité de Manning [ $1/m^{1/3}s^{-1}$ ]

R: Rayon hydraulique [m]

$C_n$ : Nombre de Courant

$\tilde{R}$ : Matrice correspondant à la jacobéenne approchée

$\tilde{D}$ : Fonction de vecteur

U: Vecteur écoulement

F: Vecteur flux

S: Vecteur source

$\Delta t$ : Pas de temps

$\Delta x$ : Pas d'espace

## REFERENCES

- [1] [1]Abbott, M. B., Marshall, G., and Rodenhuis, G. S. (1969). Amplitude-Dissipative and Phase-Dissipative Scheme for Hydraulic Jump Simulation, Proc., 13th Congress, Inter. Assoc. Hyd. Research, Tokyo, pp.313-329.
- [2] [2]Achour, B., and Debabeche, M. (2003). Control of hydraulic jump by sill in a triangular channel: Journal of Hydraulic Research, 41(3), 97-103.
- [3] [3]Carmo, J.S. (2009). Modelação em Hidráulica Fluvial e Ambiente, imprensa da universidade de Coimbra.
- [4] [4]Carvalho, R.F., Lemos, C.M., and Ramos, C.M. (2008). Numerical computation of the flow in hydraulic jump stilling basins: Journal of Hydraulic Research., 46(6), 739-752.
- [5] [5]Chow, V. T., (1959), Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill Book Company.
- [6] [6]Debabeche, M., and Achour, B. (2007). Effect of sill in the hydraulic jump in a triangular channel: Journal of Hydraulic Research., 45(1), 135-139.
- [7] [7]Debabeche, M., Cherhabil, S., Hafnaoui, A., and Achour, B. (2009). Hydraulic Jump in a Sloped Triangular Channel: Canadian Journal of Civil Engineering., 36, 655-658,
- [8] [8]Ead, S.A., and Rajaratnam, N. (2002). Hydraulic jump on corrugated beds: Journal of Hydraulic Engineering., 128(7), 656-663.
- [9] [9]Freitag, M. A., and Morton K. W. (2007). The Preissmann box scheme and its modification for transcritical flows: International Journal for Numerical Methods in Engineering., 70:791-811. DOI: 10.1002/nme.1908.
- [10] [10]Gharangik, A. and Chaudhry, M. (1991). Numerical Simulation of Hydraulic Jump: Journal of Hydraulic Engineering., 9(1195), 1195-1211.
- [11] [11]Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F., and Saviron, J. M. (1992). 1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-McCormack Scheme: Journal of Hydraulic Engineering., 118, 1359-1372.
- [12] [12]Hafnaoui, M. A., Carvalho, R. F. and Debabeche, M. (2016). Prediction of Hydraulic Jump location in Some Types of Prismatic Channels using Numerical Modelling: 6th International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures (IJREWS 2016) Lübeck, Germany. DOI:10.15142/T3D01F.

- [13] [13]Hager,W.H. (1992). Energy dissipators and hydraulic jump. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. 288 pages.
- [14] [14]Hager, W.H., and Bretz, N.V. (1987). Hydraulic jumps at positive and negative steps: Journal of Hydraulic Research.,24(4), 237-253.
- [15] [15]Hager, W.H., and Wanoschek, R. (1987). Hydraulic jump in triangular channel: Journal of Hydraulic Research., 25(5), 549-564.
- [16] [16]McCorquodale, J. A. and Khalifa, A. (1983). Internal Flow in Hydraulic Jumps: Journal of Hydraulic Engineering.,109(5), 684-701.