

# NOUVELLE APPROCHE DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS ‘MVF’ DEDIEE A LA RESOLUTION DES PROBLEMES ELECTROMAGNETIQUES 3D

H. BECHA, L. ALLOUI, L. KHENE, N. BADI ET MIMOUNE

Laboratoire de modélisation des système énergétique LMSE, Laboratoire de Génie Electrique de Biskra LGEB,  
Université de Biskra

## RESUME

Nous proposons dans le cadre de ce travail une nouvelle approche de la méthode des volumes finis dédié principalement à la modélisation tridimensionnelle des phénomènes électromagnétiques au sein des dispositifs électrotechniques. Le maillage adopté est un maillage non-structuré qui requiert un mailleur indépendant, spécifique, parfaitement adapté à l’algorithme numérique. Son rôle est de partitionner l’application étudiée en cellules élémentaires de forme aussi variée que des triangles dans le cas bidimensionnel et tétraèdres voir prismatique dans le cas tridimensionnel. Cette approche est avantageuse comparée aux approches présentées dans des travaux précédents par le fait qu’elle s’adapte parfaitement à la modélisation tridimensionnelle des problèmes électromagnétiques dans des dispositifs ayant des géométries complexes d’une part, d’autre part, elle peut résoudre des problèmes électromagnétiques où les matériaux magnétiques sont utilisés dans la conception des dispositifs étudiés, contrairement à celles déjà présentées précédemment, où seulement on peut traiter les problèmes ayant des dispositifs conçus à partir des matériaux diamagnétiques [1] voir diamagnétiques [2] comme par exemple les matériaux supraconducteurs à haute température critique. L’ensemble des modèles mathématiques et numériques est implémenté dans un code de calcul tridimensionnel sous environnement Matlab. La validité du travail présenté est atteinte par la comparaison des résultats obtenus avec des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature [3].

**MOTS CLES:** Méthode des volumes finis, problèmes électromagnétiques, géométries complexes, maillage non-structuré, problèmes tridimensionnels, matériaux magnétiques.

## 1 INTRODUCTION

La méthode des volumes finis ‘MVF’ est utilisée depuis longtemps pour les simulations numériques dans le domaine de l’engineering en particulier en mécanique des fluides [4]. Avec le temps, la méthode des volumes finis a trouvé un second essor avec des applications en électromagnétisme où elle a montré une grande efficacité pour la résolution des équations de Maxwell [5]. Elle fait partie, au même titre que les Différences Finies, de ces méthodes numériques capables de résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Dans cette nouvelle approche proposée dans le cadre de ce travail, la MVF subdivise le domaine de calcul en sous domaines (ou en volumes élémentaires) grâce à un maillage initial de type éléments finis. L’ensemble de ces volumes élémentaires constitue donc le domaine de calcul complet. Le maillage adopté est un maillage non-structuré (Fig.1) qui requiert un mailleur indépendant, spécifique, parfaitement adapté à l’algorithme numérique. Son rôle est de partitionner l’application étudiée en volumes élémentaires de forme aussi variée que des triangles (deux dimensions), tétraèdres ou prismes (trois dimensions). Cette approche est dédiée spécifiquement aux problèmes définis par des géométries qui possèdent des structures hexaédriques grâce à son

maillage non-structuré qui doit suivre naturellement la forme de la structure, les géométries complexes seront modélisées de façon plus rigoureuse et plus conforme sans que cela ne génère un nombre de mailles trop important.

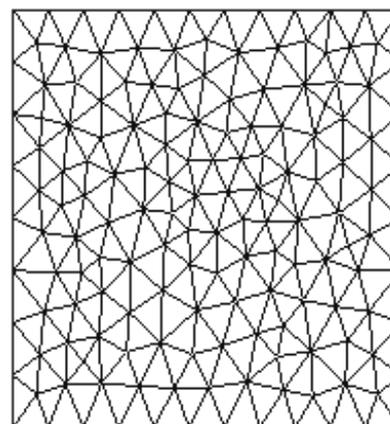


Figure 01: maillage non-structuré (Vue 2D)

## 2 MODELE MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE

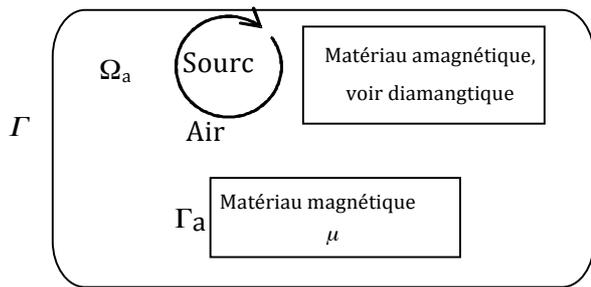


Figure 02: Problème type à résoudre

Un problème type de modélisation peut être schématisé par un système (Fig.2) composé dans le cas général, de l'air, d'un matériau amagnétique (ayant une perméabilité relative égale à l'unité) voir même un matériau diamagnétique (avec une perméabilité relative négative) et enfin un matériau magnétique (une perméabilité magnétique relative importante). Généralement pour la résolution d'un tel système en fait appel aux équations de Maxwell, ces derniers se couplent pour donner naissance à plusieurs formulations électromagnétiques. Dans le cadre de ce travail, nous avons adopté la formulation en potentiels, vecteur magnétique  $A$  et en scalaire électrique  $V$ . celle-ci, introduite avec la jauge de Coulomb est décrite par le système d'équations aux dérivées partielles (1) :

$$\nabla \times (\nu \nabla \times A) - \nabla (\nu \nabla A) = J \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \left\{ \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right) \right\} = 0 \quad (2)$$

$\nu$  et  $\sigma$  représentent respectivement la réductivité magnétique et la conductivité électrique,  $J$  est la densité de courant totale. En tenant compte des relations de l'analyse vectorielle, le premier terme de l'équation (1) devient.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla A) &= \nabla \nu \times \nabla A + \nu \nabla \times \nabla A \\ &= \nabla \nu \times \nabla \times A + \nu (-\Delta A + \nabla \nabla \cdot A) \end{aligned} \quad (3)$$

Dans la formulation (3) et pour assurer l'unicité de la solution, la jauge de Coulomb est introduite  $(\nabla A) = 0$ , Aussi, nous supposons que dans chaque région, la réductivité magnétique est constante ainsi,  $\nabla \nu = 0$ . Aux interfaces, la variation de la réductivité est supposée linéaire. Ceci mène à réécrire l'équation (1) en :

$$\nabla \nu \nabla A = -(\nabla \cdot (\nu \nabla A)) = J \quad (4)$$

Le système d'équations présenté est résolu par la méthode des volumes finis. Celle-ci intègre dans chaque volume élémentaire  $Dp = \Delta S \Delta z$  (Fig.3) les divers opérateurs différentiels de la manière suivante :

$$\begin{cases} \oint_V \frac{\Delta A_x}{dlp} dt \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_x \Delta S \cdot \Delta z \\ \oint_V \frac{\Delta A_y}{dlp} dt \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_y \Delta S \cdot \Delta z \\ \oint_V \frac{\Delta A_z}{dlp} dt \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_z \Delta S \cdot \Delta z \end{cases} \quad (5)$$

Après intégration, le système d'équations présenté précédemment se transforme à un système d'équations algébrique ci-dessous :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \nu_{pi} \frac{A_{xi} - A_{xp}}{dlp_i} dt_i \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_x \Delta S \cdot \Delta z \\ \sum_{i=1}^N \nu_{pi} \frac{A_{yi} - A_{yp}}{dlp_i} dt_i \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_y \Delta S \cdot \Delta z \\ \sum_{i=1}^N \nu_{pi} \frac{A_{zi} - A_{zp}}{dlp_i} dt_i \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z = -J_z \Delta S \cdot \Delta z \end{cases} \quad (6)$$

Après arrangement des termes, le vecteur potentiel magnétique  $A$  sera exprimé par ces composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$ . L'équation (7) exprime par exemple, la composante  $A_x$  du potentiel.

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{i=1}^N \nu_{pi} \frac{dt_i}{dlp_i} \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z \right) A_{xp} = \\ &\sum_{i=1}^N \left( \nu_{pi} \frac{dt_i}{dlp_i} \sin(dlt, dlp) \cdot \Delta z \right) A_{xi} + J_x \Delta S \cdot \Delta z \end{aligned} \quad (7)$$

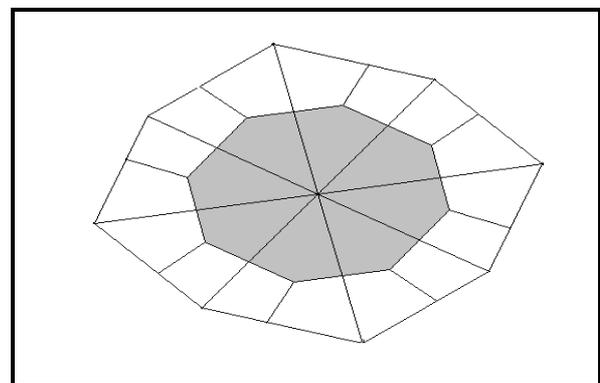


Figure 03: Vue 2D d'un volume Fini

### 3 SIMULATION, INTERPRÉTATION ET VALIDATION

Dans le but de valider l'ensemble des modèles mathématico-numériques développés, nous avons modélisé un problème type trouvé dans la littérature [3]. Le système modélisé est similaire à celui présenté dans la Fig.2. Composé d'un noyau magnétique de perméabilité magnétique relative égale à 1000, celui-ci est entouré par un inducteur formé d'une bobine d'excitation alimentée par un courant de 3000 AT (Fig.4). Dans nos simulations, les conditions aux limites adoptées sont de type Dirichlet comme présenté dans la Fig.5.

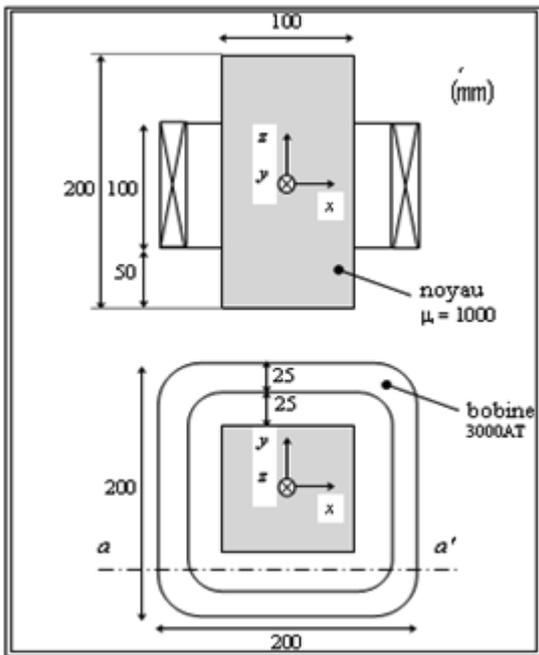


Figure 04: Description du problème à résoudre

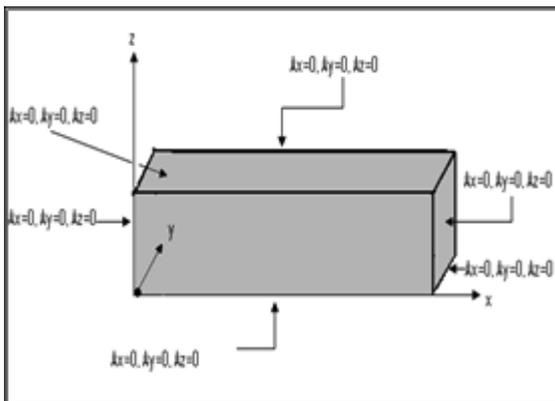


Figure 05: Conditions aux limites adoptées pour la résolution du problème étudié

La résolution du problème présenté nécessite l'utilisation d'un maillage tridimensionnel. Dans le cadre de notre travail, nous avons exploité un mailleur bidimensionnel,

celui-ci est obtenu à partir du mailleur 'pdetool, Matlab' conçu à partir des éléments triangulaires de Delaunay (Fig.6.). Dans son origine, celui-ci est dédié principalement à la résolution des problèmes électromagnétiques bidimensionnelle. Nous avons pu le monter en tranche selon l'axe Z pour l'adapter à la résolution des problèmes tridimensionnels. Le maillage primal dans le cas de l'application traité est conçu à partir de 822 éléments ayant 432 nœuds. Le maillage volumes finis utilisé est obtenu dans un second temps par la connexion des centres de gravité des éléments adjacents du maillage primal. Cette connexion mène à l'obtention du second maillage en volumes finis présenté dans la Fig.7. Le mailleur 3D présenté dans la Fig.8 est obtenu par élévation en tranche du maillage 2D obtenu selon l'axe Z.

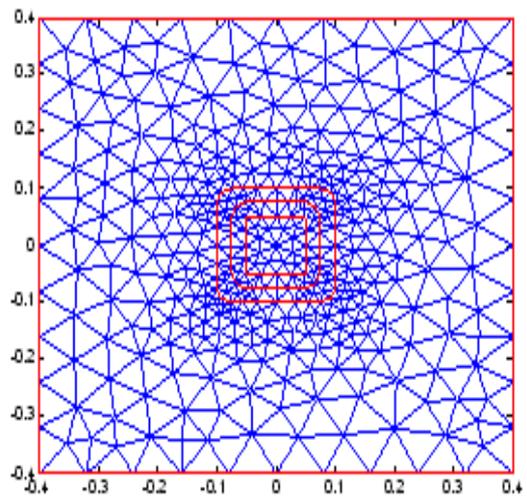


Figure 06: Maillage 2D primal en éléments finis

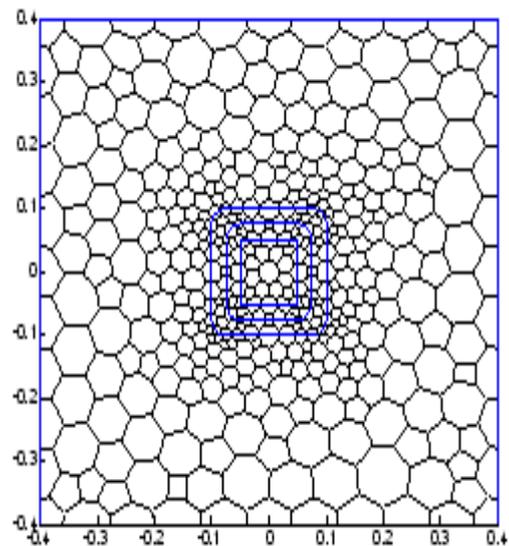


Figure 07: Maillage 2D en volumes finis

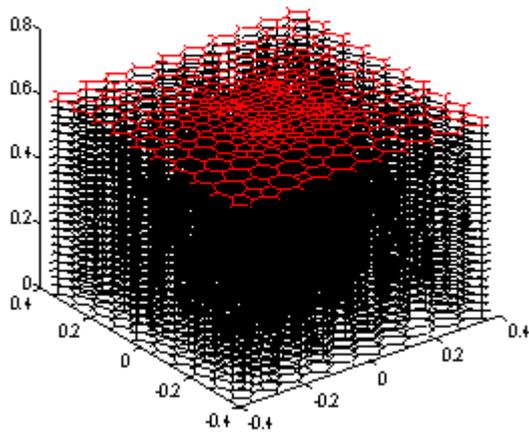


Figure 08: Maillage 3D en volumes finis

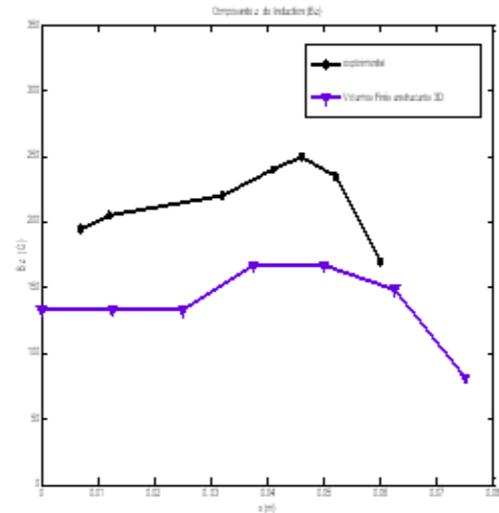


Figure 09: Comparaison entre les résultats de la méthode des volumes finis et les résultats expérimentaux

Afin de valider l'ensemble des modèles mathématique et numérique développé, nous avons comparé la valeur du champ magnétique B calculé sur la surface extérieure du circuit magnétique sur une trajectoire bien définie avec celle donnée par l'expérimental [3]. Selon les résultats présentés dans la Fig.9. La comparaison mène à dire que les résultats obtenus sont satisfaisants. Aussi pour vérifier la justesse de la répartition du champ magnétique, nous avons calculé la répartition du potentiel magnétique dans les cas, bidimensionnel et tridimensionnel. Les figures 10-11 présentent la répartition bidimensionnelle du potentiel vecteur magnétique  $A_x$  et  $A_y$ . La répartition présentée assure une parfaite symétrie par rapport à l'axe centrale du dispositif, celle-ci peut être justifiée par la configuration du dispositif modélisé ainsi par l'emplacement de l'inducteur. Le code développé permet aussi de visualiser la répartition tridimensionnel des champs magnétiques, a titre exemple, nous avons présenté sur la Fig.12 la répartition tridimensionnel du champ d'induction magnétique au sein du noyau magnétique. Selon cette présentation on peut confirmer la justesse de la répartition du champ B où elle est très intense au centre du noyau pré de l'emplacement de l'inducteur, aussi sur les bordures du noyau.

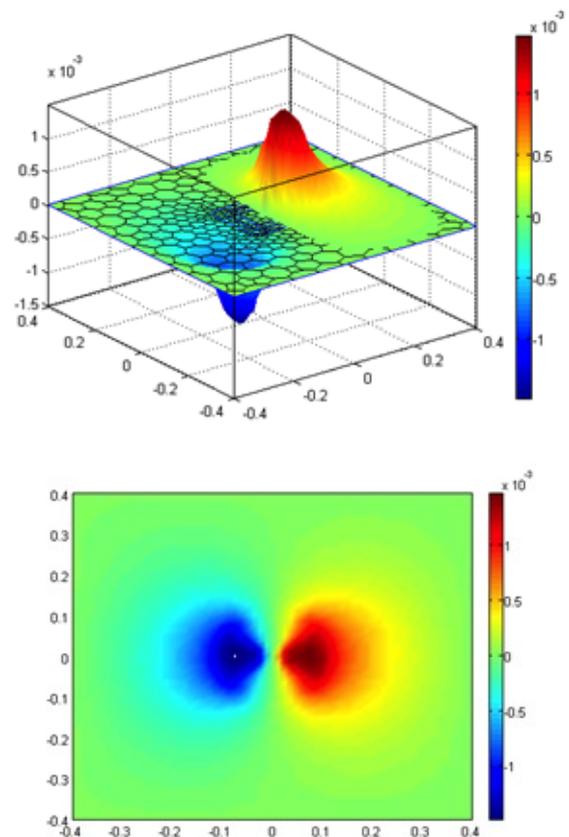


Figure 10: Répartition bidimensionnel de la composante  $A_x$  du potentiel vecteur magnétique A

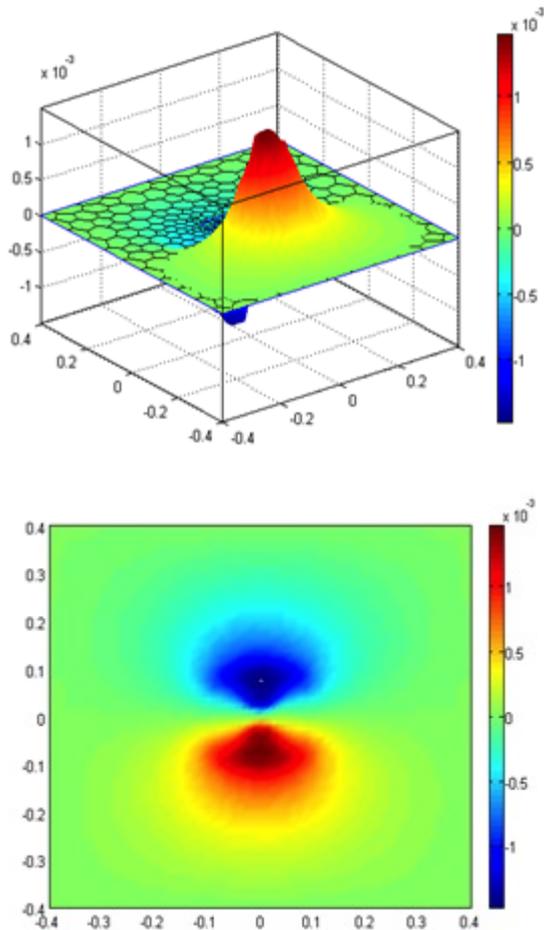


Figure 11: Répartition bidimensionnel de la composante  $A_y$  du potentiel vecteur magnétique  $A$

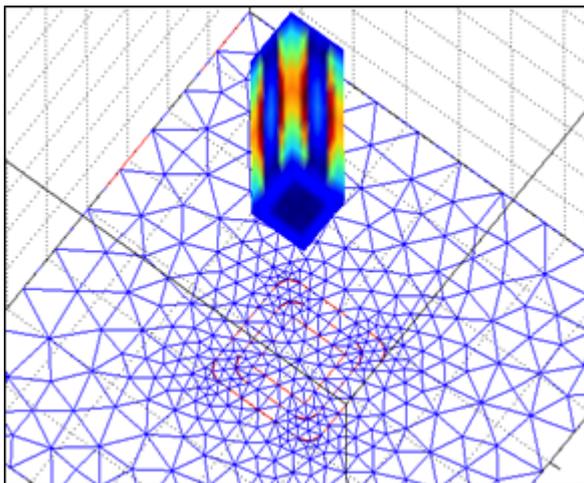


Figure 12: Répartition 3D du champ d'induction magnétique  $B$

#### 4 CONCLUSION

Dans cet article nous proposons une nouvelle approche de la méthode des volumes finis dédiés principalement à la modélisation tridimensionnelle des problèmes électromagnétiques aux seins des dispositifs ayant des

géométries complexes. Cette approche basée sur un maillage non-structuré à permet de résoudre un problème type. La comparaison avec les résultats expérimentaux valide l'approche proposée. Un faible écart entre résultats de simulation et les résultats expérimentaux apparaît. Nous pensons pouvoir améliorer les résultats par l'utilisation d'un maillage tridimensionnel plus adapté en particulier le maillage GMSH.

#### REFERENCES

- [1] L. Alloui, F. Bouillault, and S. M. Mimoune (2009), "Numerical study of the influence of flux creep and of thermal effect on dynamic behavior systems with a high-Tc superconductor using control volume method," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 45, no. 2, pp. 208011–208019, Feb. 2009.
- [2] A. Kameni, M. Boubekeur, L. Alloui, F. Bouillault, J. Lambrechts and C. Geuzaine (2014), "A 3-D semi-implicit method for computing the current density in bulk superconductors," *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 50, no. 2, Feb. 2014.
- [3] M. L. khene, L. Alloui, F. Bouillault, A. K. Ntichi, S. M. Mimoune and Mouloud Feliachi (2015), "3-D Numerical Evaluation of Trapped Magnetic Field and Temperature of a Rectangular GdBaCuO Bulk Magnetized by MMPSC Method," *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 51, no. 3, March 2015.
- [4] Such V. Patankar, "Numerical Heat transfer and fluid Flow," *Series in Computational methods in mechanics and thermal sciences*.
- [5] L. Alloui, M. L. Khene, A. K. Ntichi, F. Bouillault, S. M. Mimoune and M. Feliachi (2015), "Analysis of Trapped Magnetic Field During Magnetization Process by SPA Method of Bulk Superconductor," *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 51, no. 3, March 2015.