

# ANALYSE DU COMPORTEMENT DE FLAMBAGE DES PLAQUES MINCES STRATIFIEES EN MATERIAUX COMPOSITES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

ABDELOUAHAB TATI<sup>1</sup> & MABROUK HESSINI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département de Génie Civil, Université Mohamed Khider Biskra, B.P 145 R.P. 07000 BISKRA Algérie  
E-mail; atati1@caramail.com

<sup>2</sup>Département de Génie Mécanique, Université Mohamed Khider Biskra, B.P 145 R.P. 07000 BISKRA Algérie

## RÉSUMÉ

Un élément fini quadrilatère pour l'analyse du flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites a été proposé. L'élément est une combinaison d'un élément membranaire iso-paramétrique linéaire et d'un élément rectangulaire de haute précision de type Hermite transformé. L'hypothèse de Kirchhoff a été adoptée bien qu'en général les déformations de cisaillement ne soient pas négligées dans le cas des plaques et des coques en matériaux composites. On a supposé que l'hypothèse est vérifiée dans chaque couche, ce qui revient évidemment à supposer qu'elle l'est pour toute l'épaisseur de la plaque. Pour la construction des matrices de rigidité et géométrique, le principe de variation de l'énergie potentielle de déformation a été utilisé. Des résultats satisfaisants ont été obtenus dans les cas isotrope et anisotrope aussi bien en flexion qu'en flambage, pour différentes géométries de plaques.

**MOTS-CLE :** flexion, flambage, composites, stratifiés, élément fini

## ABSTRACT:

A quadrilateral finite element for the analysis of buckling of thin laminated plates is proposed. The element is a combination of a linear isoparametric membrane element and a high precision rectangular Hermite, transformed element. The theory of Kirchhoff is adopted. Although in case of laminated plates and shells, the shearing strains are important. It was supposed that the Kirchhoff theory is checked for each layer, therefore it will be checked for all the plate. For the construction of rigidity and geometrical matrices, the principle of variation of the strain potential energy was used. Good results have been obtained in the isotropic and anisotropic cases either in bending or in buckling, for various geometries of plates.

**KEYWORDS:** bending, buckling, composites, laminated, finite element

## 1 INTRODUCTION

Les stratifiés composites trouvent un grand intérêt dans une variété de structures complexes, comme ceux adoptés en aéronautique, automobile et civiles. La conception de ce type de structures nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués et prenant en compte les spécificités de ces matériaux. Les méthodes numériques et notamment la méthode des éléments finis sont indispensables pour le dimensionnement des structures composites complexes.

En fait de nos jours, un grand nombre de codes d'éléments finis tient compte des stratifiés composite. Cependant l'analyse du comportement des plaques stratifiées reste toujours un problème de recherche ouvert, comme conséquence de leur comportement complexe. En effet, en plus de leur comportement généralement anisotrope et la

présence d'importantes déformations de cisaillement transverse, viennent s'ajouter les paramètres de couplage extension-flexion.

La plupart des investigations entreprises sur les plaques stratifiées, sont dédiées à la détermination des contraintes, des déformations ou des déplacements d'origine flexionnelle. L'analyse des structures au comportement d'instabilité est moins fréquente en dépit de l'importance du phénomène mis en évidence par la rupture en service de nombreuses structures monumentales.

Les structures composites minces (plaques stratifiées) qui sont largement utilisées de nos jours, deviennent instables lorsqu'elles sont sujettes à des chargements de nature mécanique ou thermique et flambent dans la zone élastique. Par conséquent, le flambage présente une très grande importance lors de la conception de ce type de structures.

Plusieurs théories sur les plaques stratifiées ont été proposées dans la littérature. On peut les classer en trois catégories.

La première est la théorie classique des stratifiés (2) (7) basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et qui néglige les déformations de cisaillement transverse et suppose que la normale au feuillet moyen reste normale après déformation. En adoptant cette théorie, on suppose que l'hypothèse de Kirchhoff est vérifiée dans chacune des couches. Cela revient évidemment à supposer que cette hypothèse est vérifiée globalement dans toute l'épaisseur de la plaque. Une telle approche se justifie si la plaque est mince, les couches sont composées de matériaux assez peu différents, et possèdent des modules de cisaillement transverse du même ordre de grandeur que les autres modules. Une autre condition pour que cette approche donne de bons résultats est que le chargement et les conditions aux limites n'occasionnent que peu de flexion dans le stratifié.

La deuxième catégorie concerne celles de type Reissner-Mindlin étendue aux plaques stratifiées (3) (7) où l'on remplace le stratifié par une plaque anisotrope homogène équivalente. Ces théories tiennent compte des effets du cisaillement transverse et introduisent parmi les déplacements inconnus les rotations des normales. Les théories du premier ordre, comme celles adoptées par Reissner et Whitney (3) (15), considèrent les rotations des normales constantes dans toute l'épaisseur de la plaque et postulent une cinématique linéaire dans le sens de l'épaisseur. On trouve aussi des théories dites d'ordre supérieures basées sur l'approximation non linéaires des déplacements.

Dans la troisième catégorie, les modèles sont basés sur l'approche par couche. Ce sont des modèles sophistiqués qui permettent des études locales, notamment à l'interface des couches. Bien évidemment, le nombre de variables dépend du nombre de couches, ce qui augmente le volume des calculs.

Dans le présent travail qui est une contribution à l'analyse des plaques minces stratifiées en matériaux composites, on a établie une approche d'un élément fini quadrilatéral pour le flambage mécanique ou thermique. L'élément proposé est une combinaison d'un élément membranaire quadrilatéral isoparamétrique et d'un élément plaque rectangulaire de type Hermite de premier ordre, transformé pour s'adapter formes générales des plaques minces.

La formulation est basée sur le principe de l'énergie potentielle minimale en adoptant la théorie de la première catégorie dite 'Théorie classique des stratifiés', basée sur l'hypothèse de Kirchhoff. Dans le cas général des plaques stratifiées, on applique la théorie de Reissner-Mindlin étendue aux plaques stratifiées composites du fait que l'effet de cisaillement soit d'une grande importance. Cependant dans la présente étude, le cisaillement transverse a été négligé. Cela se justifie par le fait que les couches soient assez minces, identiques et possédants des modules de cisaillement transverse de même ordre de grandeur que les autres modules. Cette hypothèse est évidemment supposée vérifiée pour toute la plaque, d'autant plus que

lors de l'analyse du flambage élastique, la flexion est faible. La comparaison des résultats avec ceux obtenus analytiquement ou avec ceux obtenus par d'autre type d'éléments tenant compte du cisaillement transverse, a montré l'efficacité de cette approche dans le cas des plaques minces.

## 2 FORMULATION DES ÉLÉMENTS FINIS

### 2.1 Relations cinématiques

Le champ du déplacement selon la théorie classique des stratifiés basée sur la théorie de Kirchhoff (7), s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z w_{,x} \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z w_{,y} \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad [1]$$

avec  $u_0, v_0, w_0$  sont les déplacements du plan moyen d'une plaque.

Le champ des déformations incluant les grandes déformations (7) (8) est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z k_{xy} \end{aligned} \quad [2]$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad [3]$$

### 2.2 Loi de comportement

En adoptant la théorie classique des stratifiées, les forces et les moments sont liés aux déformations à mi-plan et aux courbures par la relation matricielle suivante (7) :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad [5]$$

En notant par  $\sigma_i$  les contraintes dans le plan, alors :

$$N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dz \quad [6]$$

$$M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i z dz$$

Les rigidités extensionnelles, de couplage et flexionnelle d'un stratifié, sont définies par :

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz \quad [7]$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz$$

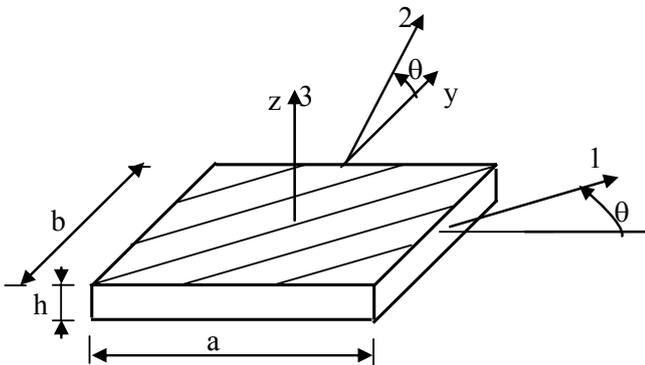
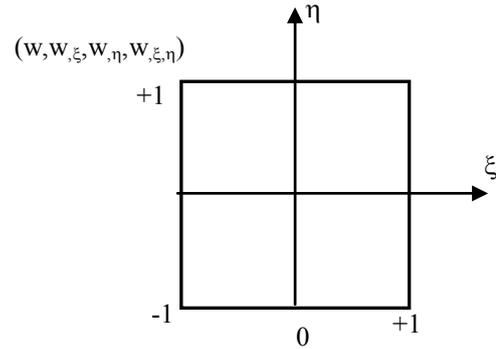


Figure 1 : Repère local et repère global

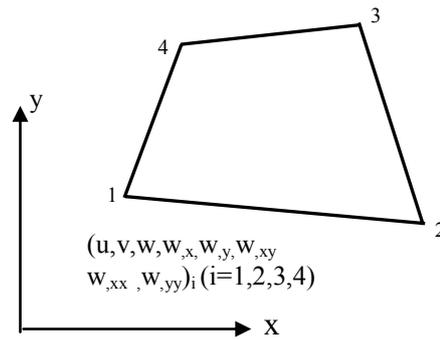
Avec  $\bar{Q}_{ij}$  désignant les coefficients d'élasticité d'une couche dans le repère global (x, y, z) du stratifié faisant un angle  $\theta$  avec le repère local (1, 2, 3) (figure1).

### 2.3 Description de l'élément quadrilatéral

L'élément proposé est une combinaison d'un élément quadrilatéral iso paramétrique membranaire et d'un élément plaque rectangulaire de grande précision de type Hermite de premier ordre. L'élément possède 4 nœuds à 8 degrés de liberté chacun. Les coordonnées cartésiennes et intrinsèques ainsi que les composantes du déplacement à mi-plan notées u et v dans le plan et w dans le sens transversal, sont montrées sur la figure 2



Elément de référence



Elément réel

Figure 2 : Coordonnées et déplacements des nœuds de l'élément avec 32 degrés de liberté

L'énergie potentielle de déformation de l'élément est donnée par (8) :

$$U = \frac{1}{2} \int \int (\{\varepsilon_l^0\}^T [A] \{\varepsilon_l^0\} + \{\varepsilon_l^0\}^T [B] \{k\} + \{k\}^T [B] \{\varepsilon_l^0\} + \{k\}^T [D] \{k\} + \{\varepsilon_{nl}^0\} [N]) dx dy \quad [8]$$

où

$$\{\varepsilon_l^0\}^T = \{u_{,x}, v_{,y}, u_{,y} + v_{,x}\}$$

$$\{\varepsilon_{nl}^0\}^T = \{(w_{,x})^2, (w_{,y})^2, 2.(w_{,x})(w_{,y})\}$$

$$\{k\}^T = \{-w_{,xx}, -w_{,yy}, -2.w_{,xy}\}$$

$$\{N\}^T = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$$

Les fonctions d'interpolation des coordonnées et des déplacements à travers l'élément sont données respectivement par (5) :

$$x(\xi, \eta) = \sum N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y(\xi, \eta) = \sum N_i(\xi, \eta) y_i \quad (i=1,2,3,4) \quad [9]$$

$$u(\xi, \eta) = \sum N_i(\xi, \eta) u_i, \quad v(\xi, \eta) = \sum N_i(\xi, \eta) v_i \quad (i=1,2,3,4) \quad [10]$$

avec :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad [11]$$

Le déplacement hors plan de l'élément de référence est exprimé comme le produit des polynômes Hermite du 1<sup>er</sup> ordre unidimensionnel [7]

$$w = H_{00} w_i + H_{10} \frac{\partial w}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial w}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \quad [12]$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{00} &= \frac{1}{16} (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 2) x (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 2) \\ H_{10} &= -\frac{1}{16} \xi_0 (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 1) x (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 2) \\ H_{01} &= \frac{1}{16} (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 2) x \eta_0 (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 1) \\ H_{11} &= \frac{1}{16} \xi_0 (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 1) x \eta_0 (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 1) \end{aligned} \quad [13]$$

Le passage de l'élément rectangulaire de référence à l'élément quadrilatéral réel nécessite les opérations de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \\ &\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad [14]$$

Alors, les fonctions d'interpolation de l'élément réel s'écrivent :

$$\begin{aligned} w &= L_w w + L_{\theta_x} \frac{\partial w}{\partial x} + L_{\theta_y} \frac{\partial w}{\partial y} + L_{\theta_{xy}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ &\quad L_{\theta_{xx}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_{\theta_{yy}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad [15]$$

avec :

$$\begin{aligned} L_w &= H_{00} \\ L_{\theta_x} &= H_{10} \frac{\partial x}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial x}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \\ L_{\theta_y} &= H_{10} \frac{\partial y}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial y}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ L_{\theta_{xy}} &= H_{11} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ L_{\theta_{xx}} &= H_{11} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ L_{\theta_{yy}} &= H_{11} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad [16]$$

L'état des déplacements mène à un élément de 32 degrés de liberté avec 8 degrés de liberté par nœud soit :

$$\{q\} = \left\{ u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad [17]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ sont des variables non essentielles.}$$

En substituant les polynômes d'interpolation dans l'équation de l'énergie, on obtient :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \left\{ \begin{aligned} &[S_\varepsilon]^T [A] [S_\varepsilon] + [S_\varepsilon] [B] [S_k] \\ &+ [S_k]^T [B] [S_\varepsilon] + [S_k]^T [D] [S_k] \end{aligned} \right\} \\ &\quad |J| d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \left\{ [G]^T [N_0] [G] \right\} \{q\} |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad [18]$$

où :

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon_1^0 \} &= [S_\varepsilon] \{q\} \\ \{k\} &= [S_k] \{q\} \end{aligned}$$

$$[G] \{q\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[N_0] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

avec :

$[S_\varepsilon]$  et  $[S_k]$  des matrices de 3x32 composantes, qui relient respectivement les déformations membranaires linéaires et les courbures de l'élément au vecteur des déplacements  $\{q\}$

$[G]$  est une matrice 2x32 composantes, qui relie le vecteur  $[\partial w / \partial x, \partial w / \partial y]$  au vecteur déplacement  $\{q\}$

$|J|$  est le déterminant de la matrice jacobéenne.

## 2.4 Analyse du flambage

En se basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale, la première variation permet d'obtenir l'expression de la matrice de rigidité élémentaire.

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} [S_\varepsilon]^t [A] [S_\varepsilon] + [S_\varepsilon]^t [B] [S_k] \\ + [S_k]^t [B] [S_\varepsilon] + [S_k]^t [D] [S_k] \end{array} \right\} |J| d\xi d\eta \quad [19]$$

Dans la plupart des problèmes de flambage des plaques, la détermination en avance de la distribution des contraintes à travers la plaque n'est pas nécessaire. Cependant dans le cas général et lorsque les contraintes sont non uniformément distribuées à travers la plaque, notamment lorsque la plaque renferme des ouvertures ou subit une variation non uniforme de température, il sera nécessaire de déterminer la distribution des efforts membranaires comme première étape dans cette analyse.

avec :

$$\{N_0\} = ([A][S_\varepsilon] + [B][S_k])\{q\} \quad [20]$$

Le vecteur des déplacements élémentaires  $\{q\}$  est obtenu en résolvant l'équation :

$$[K_G]\{X\} = \{F\} \quad [21]$$

où  $\{F\}$  est le vecteur force global obtenu en soumettant la plaque à un chargement membranaire et  $\{X\}$  est le vecteur des déplacements global.

L'annulation de la deuxième variation de l'énergie potentielle de déformation, permet d'obtenir le problème de valeurs propre suivant :

$$[K_G]\{\Delta\} + \lambda [K_\sigma] \{\Delta\} = 0 \quad [22]$$

avec :

$\lambda$  la charge non dimensionnelle de flambement et  $\{\Delta\}$  représente le vecteur modal et  $[K_\sigma]$  est la matrice géométrique globale qui est l'assemblage des matrices géométriques élémentaires  $[K_\sigma^e]$ . Cette matrice est donnée par :

$$[K_\sigma^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^t [N_0] [G] |J| d\xi d\eta \quad [23]$$

Les composantes des matrices  $K_G$  et  $K_\sigma$  sont calculées par l'intégration numérique de Gauss en utilisant 2x2 points

## 3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION

### 3.1 Flambage

Le présent élément a été testé pour l'étude du comportement du flambage pour différents cas. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par des références disponibles dans la littérature. La première étude consiste en des plaques carrées isotropes de côté  $a = 6$  et d'épaisseurs  $t = 0,25 ; 0,375$  et  $0,5$ . Les plaques sont simplement appuyées sur les quatre côtés et soumises à une compression unidirectionnelle.

Les propriétés d'isotropie sont :

$$E = 40 \times 10^6, \nu = 0,3$$

Les plaques sont subdivisées en 2x2, 4x4, 6x6 et 10x10 éléments.

Les valeurs des charges critiques calculées par le présent élément, celles calculées analytiquement à l'aide de l'équation de Timoshenko (14) et celles obtenues en utilisant l'élément shell 63 du Logiciel d'éléments finis ANSYS (2), sont montrées sur le tableau 1 et sur les figures 3 et 4. Les résultats ont montré la rapidité de la convergence de l'élément et sa précision par comparaison aux résultats analytiques notamment.

La deuxième étude est faite sur des plaques carrées stratifiées en matériau composite, simplement appuyées, de côté  $a = 6$  et d'épaisseurs totales  $t = 0,23, 0,355$  et  $0,48$ . Les plaques sont composées de plusieurs couches identiques, avec différents angles d'orientation des fibres ' $\theta$ '. La configuration du stratifié est  $[90/+ \theta / - \theta]_s$  avec  $\theta$  prenant les valeurs 15, 30 et 45 degrés respectivement. Les propriétés d'anisotropie des couches sont  $E_1 = 5490000, E_2 = 953000, \nu_{12} = 0,3001$  et  $G_{12} = 347000$  (2) .

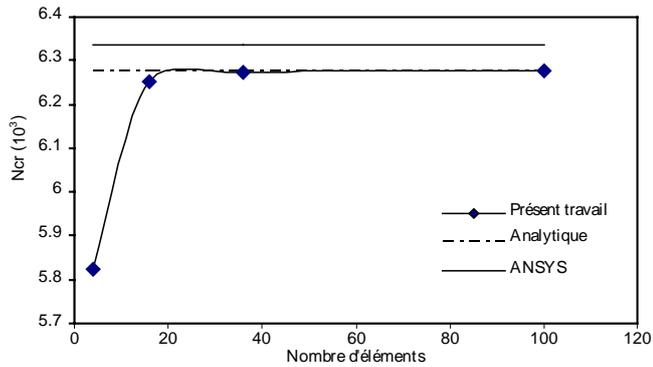
Les plaques sont subdivisées en 2x2, 4x4, 6x6 et 10x10 éléments comme pour la première étude.

Les valeurs des charges critiques calculées pour différents paramètres par le présent élément, celles calculées analytiquement à l'aide de l'équation de Whitney (7) et celles calculées en utilisant l'élément de référence Shell 99 du Logiciel ANSYS (2), sont rassemblées dans les tableaux 2, 3 et 4.

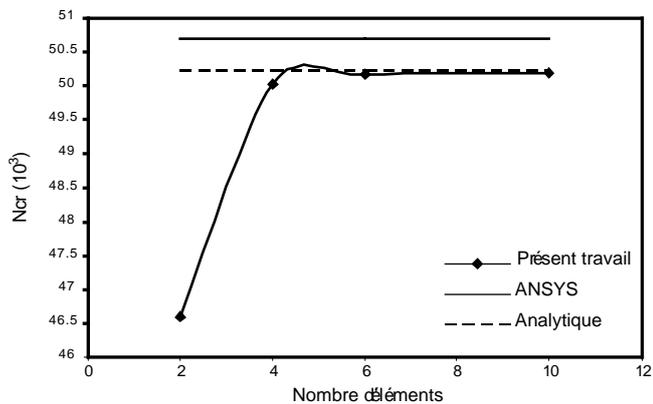
Les résultats montrent dans ce cas aussi la rapidité de convergence et la précision de la solution obtenue par cet élément par comparaison à celle obtenue analytiquement et celle obtenue par ANSYS. Cela nous incite à utiliser cet élément pour une étude paramétrique du flambage mécanique ou thermique des plaques minces stratifiées en matériaux composites.

**Tableau 1 : Charges critiques ( $\times 10^3$ ) pour plaques isotropes**

t	Maillage présent élément				ANSYS Réf.[2]	Analy Réf. [13]
	2x2	4x4	6x6	10x10		
0,25	5,823	6,250	6,272	6,2767	6,336	6,277
0,375	19,652	21,094	21,169	21,185	21,383	21,184
0,5	46,582	50,024	50,181	50,206	50,685	50,214



**Figure 3 : Variation de la charge critique en fonction du nombre d'élément ( $t=0.25$ )**



**Figure 4 : Variation de la charge critique en fonction du nombre d'élément ( $t=0.5$ )**

**Tableau 2 : Charge critique d'une plaque carrée simplement appuyée pour  $\theta = 15^\circ$**

t	Maillage présent élément					ANSYS REF.[2]	Analytique REF.[7]
	2x2	4x4	6x6	10x10	15x15		
0,23	2,128	2,300	2,311	2,314	2,314	2,247	2,314
0,355	7,808	8,441	8,478	8,490	8,497	7,977	8,507
0,48	19,370	20,883	20,975	21,007	21,004	18,874	21,029

**Tableau 3 : Charge critique d'une plaque carrée simplement appuyée pour  $\theta = 30^\circ$**

t	Maillage présent élément					ANSYS REF.[2]	Analytique REF.[7]
	2x2	4x4	6x6	10x10	15x15		
0,23	1,952	2,445	2,478	2,489	2,490	2,402	2,509
0,355	7,162	8,972	9,092	9,132	9,143	8,469	9,226
0,48	17,719	22,494	22,494	22,595	22,606	19,915	22,805

**Tableau 4 : Charge critique d'une plaque carrée simplement appuyée pour  $\theta = 45^\circ$**

t	Maillage présent élément					ANSYS REF.[2]	Analytique REF.[7]
	2x2	4x4	6x6	10x10	15x15		
0,23	1,605	2,430	2,484	2,502	2,506	2,476	2,607
0,355	5,890	8,919	9,114	9,182	9,204	8,703	8,585
0,48	14,573	22,066	22,547	22,712	22,750	20,407	22,693

#### 4 CONCLUSION

Un élément fini quadrilatéral pour le flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites a été proposé. L'élément est une combinaison d'un élément membranaire isoparamétrique et d'un élément rectangulaire à haute précision de type Hermite, transformé pour le cas général de flexion. Les matrices de rigidité et géométrique ont été déterminées en se basant sur le principe d'énergie potentielle minimale. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions de problèmes disponibles dans la littérature pour différents cas. L'élément a montré une bonne précision de résultats, notamment dans le cas de l'analyse du comportement au flambage des plaques plus minces.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.J.M. Ferreira et al, Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method, Composites: Part B 34 (2003) 627–636
- [2] Calvin D. Austin, buckling of symmetric laminated fiberglass reinforced plastic (FRP) plates, Master of Science in Civil Engineering, University of Pittsburgh, (2003)
- [3] D. Engrand et J. Bordas, Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwichs par la méthode des éléments finis, LA RECHERCHE AEROSPATIAE, Année 1973 n2 (Marsh-Avril) pp 109-118

- [4] F. Aurccho, E. Sacco, A mixed-enhanced finite element for the analysis of laminated composite plates, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 44, 1481-1504 (1999).
- [5] G. Dhatt, G. Touzot, (1981), Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A Editeur Paris et les presses de l'Université Laval Québec
- [6] H. Kardestuncer, Editor in CHIEF, D. Norrie, Project Editor, *Finite element Handbook*, Mc. Graw, Hill
- [7] J.-M. Berthelot, *Matériaux composites*, Edition TEC et DOC, Paris, 3<sup>e</sup> édition.
- [8] Lien-Wen Chen and Lei-Yi Chen, Thermal buckling analysis of laminated cylindrical plates by the finite element method, *Computer and structures* vol.34 N0 1 pp 71-78 (1989).
- [9] O. C. Zienkiewicz *The finite element method*. McGraw Hill, London (1977).
- [10] Pal. G. Bergan and Xiuxi Wang, Quadrilateral plate bending elements with shear deformations, *computer and structures* vol. 19 N01-2 pp 25-34 1984.
- [11] P. Lardeur et J.L. Batoz Evaluation d'un nouvel élément fini pour l'analyse statique ou dynamique des plaques composites, ECGM-3 Bordeaux, MARS 1989.
- [12] Reinhard Piltner and Deepu S.Joseph, A mixed finite element for plate bending with eight enhanced strain modes, *Commun.Numer.Meth.Engng* 2001;17 : 443–454 (DOI:10.1002/cnm.416).
- [13] S. Timoshenko and S.Woinowsky –Krieger, *Theory of plates and shells*, 2<sup>nd</sup> Edn. McGraw Hill, New York (1959).
- [14] S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York. (1961).
- [15] Viet Tung Nguyen, *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des pont et chaussées, 2004.