

## A new 4-node quadrilateral element based on layerwise approach for free vibration analysis of laminate-faced sandwich plates

### *Nouvel élément quadrilatère à quatre nœuds basé sur l'approche layerwise pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwich à peaux stratifiées*

Mohamed-Ouejdi Belarbi<sup>1✉</sup>, Abdelouahab Tati<sup>1</sup>, Abdelhak Khechai<sup>2</sup>, Houdayfa Ounis<sup>1</sup>

1 Laboratoire de Génie Energétique et Matériaux (LGEM), Université de Biskra, B.P. 145 R.P. 07000, Biskra, Algeria

2 Laboratoire de Génie Civil, LRGC. Université de Biskra, B.P. 145, R.P. 07000, Biskra, Algeria

Received 17 December 2015

Revised 10 March 2016

Accepted 14 March 2016

Published online: 24 March 2016

#### Keywords

Finite element

Multilayered

Sandwich plates

Free vibration

Interlaminar

**Abstract:** The new quadrilateral element based on the layerwise approach, developed earlier by the present authors for the static analysis of laminated composite and sandwich plates, is extended to study the free vibration behavior of multilayer sandwich plates. The model is based on the third order shear deformation theory for the core and the first order shear deformation theory for the face sheets. Compatibility conditions are imposed at face sheets/core interfaces to satisfy the interlaminar displacement continuity. Unlike the majority of the layerwise models, the number of DOFs is independent of the number of layers. In order to study the free vibration, a consistent mass matrix is adopted in the present formulation. The obtained numerical results by the present model are in excellent agreement with those obtained via analytical solution and numerical results found in the literature.

© 2016 The authors. Published by the Faculty of Sciences & Technology, University of Biskra. This is an open access article under the CC BY license.

**Résumé :** Un nouvel élément quadrilatère basé sur l'approche layerwise, précédemment développé par les présents auteurs pour l'analyse statique des plaques composites stratifiées et sandwich, est étendu pour l'étude du comportement de la vibration libre des plaques sandwich à peaux stratifiées. Le modèle est basé sur la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre pour l'âme et la théorie du premier ordre pour les deux peaux. Le présent modèle satisfait les conditions de compatibilité ainsi que la continuité des déplacements inter-laminaires. A la différence de la majorité des modèles layerwise, Le nombre de DDL indépendant du nombre de couches. Dans le but d'étudier la vibration libre, une matrice de masse cohérente est adoptée dans la présente formulation. Les résultats numériques obtenus par le présent modèle sont en excellent accord avec la solution analytique et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis trouvés dans la littérature.

**Mots clés :** Élément fini; Multicouches; Plaques sandwichs; Vibration libre; Inter-laminaires.

## 1. Introduction

De nos jours, les matériaux composites sandwichs reçoivent une attention considérable, grâce à leurs rapports rigidité-poids, résistance-poids, faible coût d'entretien et bien d'amples qualités. Ces matériaux deviennent de plus en plus incontournables dans les secteurs du génie civil, de la marine, de l'automobile ainsi que dans les domaines de l'aéronautique et l'aérospatiale (Belarbi 2015). Malgré les nombreux avantages que présentent ces matériaux, il reste toujours des questions sur la complexité du comportement de ces derniers, à cause des problèmes liés principalement à leur hétérogénéité et leur anisotropie. Par conséquent, la précision des résultats pour l'analyse des structures sandwichs dépend essentiellement du modèle numérique adopté.

Dans le domaine de la modélisation des structures multicouches, deux approches sont généralement employées à savoir :

L'approche monocouche équivalente (*Equivalent Single Layer, ESL*) et l'approche par-couche (*layerwise*). Dans la première approche, la plaque multicouche est homogénéisée et considérée comme une seule couche (Nayak et al. 2003; Chakrabarti and Sheikh 2004, Ounis et al. 2014, khechai et al. 2014). Les principaux avantages des modèles *ESL* sont leur simplicité et leur faible coût de calcul, dû au petit nombre des variables dépendantes. Cependant, cette approche est incapable de donner des réponses précises au niveau des interfaces. Contrairement, l'approche *layerwise* vient pour pallier ce problème, en donnant des réponses plus précises au niveau d'interface (Nabarrete et al. 2003; Linke et al. 2007; Maturi et al. 2014; Belarbi and Tati 2015; Belarbi et al. 2016). Dans cette approche, le multicouche est subdivisé en sous structures, on applique à chaque sous structure une théorie. Par exemple la théorie classique (CLPT), la théorie du premier ordre (FSDT) ou celle d'ordre supérieur (HSDT). Ce qui signifie que le

✉ Corresponding author. E-mail address: belarbi.m.w@gmail.com

nombre d'inconnus augmente avec l'augmentation du nombre de couches.

D'après la littérature, nous avons constaté qu'un grand nombre d'auteurs utilisent des modèles d'éléments finis ayant un grand nombre de nœuds et/ou de degrés de liberté (DDL), en particulier ceux basés sur l'approche layerwise, citons à titre d'exemple : Ramtekkar et al. (2003) qui ont développé un élément brique 3D contenant 18 nœuds avec 108 DDL. Dans la même année, Nabarrete et ses collègues ont construit un élément fini 3D contenant 240 DDL. Par ailleurs, Ramesh et al. (2009) ont développé aussi un élément fini triangulaire à 45 nœuds avec 135 DDL. En 2015, Pandey and Pradyumna ont formulé un élément fini quadrilatère à 8 nœuds avec 104 DDL pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques sandwich. Par conséquent, nous avons proposé, dans ce travail, un nouveau modèle concurrent à la majorité des modèles précédents, ayant un nombre réduit de nœuds et de DDL. Ce nouveau modèle élément fini sera destiné à l'analyse de la vibration libre des structures sandwich multicouche.

## 2. Formulation du présent modèle

Les plaques sandwichs sont des structures qui se composent de trois couches principales, (Figure 1) dont deux peaux minces (supérieure-inférieure) d'épaisseurs  $h_t$ ,  $h_b$  respectivement, et une couche centrale épaisse, nommée âme, d'épaisseur  $h_c$ . L'épaisseur totale de la plaque  $h$  est la somme des épaisseurs de toutes les couches. Le plan  $(x,y)$  du système de coordonnées coïncide avec le plan moyen de la plaque.

### 2.1 Relations cinématiques de l'âme

La variation des déplacements dans le plan ( $u$ ,  $v$ ) et le déplacement transversal ( $w$ ), à travers l'épaisseur, peut être exprimée, respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} u_c &= u_0 + z\psi_x^c + z^2\eta_x^c + z^3\zeta_x^c \\ v_c &= v_0 + z\psi_y^c + z^2\eta_y^c + z^3\zeta_y^c \\ w_c &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont respectivement, les composantes de déplacement dans le plan et hors plan, du plan moyen de la plaque sandwich.  $\psi_x^c$  et  $\psi_y^c$  représentent les rotations du premier ordre de la section autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

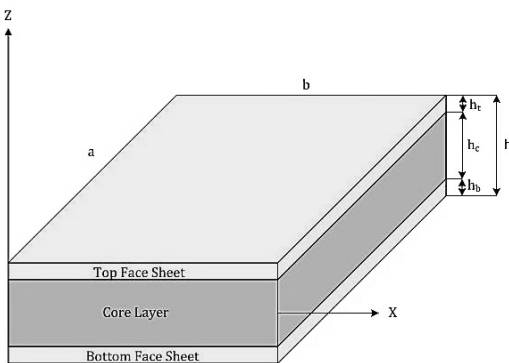


Fig. 1. Géométrie et notations d'une plaque sandwich.

Les rotations  $\eta_x^c$ ,  $\eta_y^c$ ,  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  sont des termes d'ordre supérieur, où  $\eta_x^c$  et  $\eta_y^c$  symbolisent les termes du second ordre (courbure) et  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  sont des termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Les relations déformation-déplacement peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_x^{(0)} + z\chi_x^{(1)} + z^2\chi_x^{(2)} + z^3\chi_x^{(3)} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_y^{(0)} + z\chi_y^{(1)} + z^2\chi_y^{(2)} + z^3\chi_y^{(3)} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(0)} + z\chi_{xy}^{(1)} + z^2\chi_{xy}^{(2)} + z^3\chi_{xy}^{(3)} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^{(0)} + z\chi_{yz}^{(1)} + z^2\chi_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^{(0)} + z\chi_{xz}^{(1)} + z^2\chi_{xz}^{(2)} \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 Relations cinématiques des peaux

Les conditions de compatibilités ainsi que la continuité des déplacements au niveau d'interface, conduisent aux expressions suivantes des déplacements dans les deux peaux (figure 2) :

#### 2.2.1. Peau supérieure

Pour la peau supérieure, en substituant l'équation de champ de déplacement de l'âme pour  $(z = h_c/2)$ , le champ de déplacement de la peau supérieure sera exprimé par la formule suivante :

$$\begin{aligned} u_t &= u_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^t \\ v_t &= v_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^t \\ w_t &= w_0 \end{aligned} \quad (3)$$

#### 2.2.2. Peau inférieure

La substitution de l'équation de champ de déplacement de l'âme pour  $z = -h_c/2$ , conduira à l'expression du champ de déplacement de la peau inférieure.

$$\begin{aligned} u_b &= u_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^b \\ v_b &= v_0 - \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c - \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^b \\ w_b &= w_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Pour la peau supérieure, les relations cinématiques sont données par les expressions suivantes :

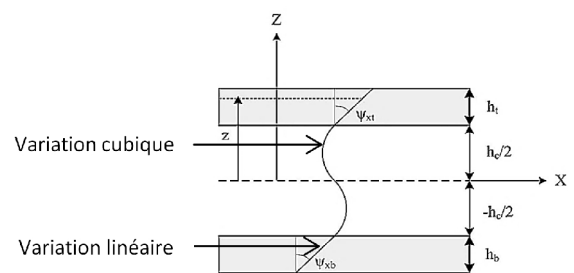


Fig. 2. Cinématique du modèle proposé.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(z - \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^t &= \frac{\partial v_t}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(z - \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4} \left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) \\ &\quad + \frac{h_c^3}{8} \left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \left(z - \frac{h_c}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz}^t &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^t, \quad \gamma_{xz}^t = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^t \end{aligned} \quad (5)$$

De même pour la peau inférieure.

### 2.3 Loi de comportement

Les deux peaux (supérieure et inférieure) sont considérées comme des plaques en matériaux composites stratifiées. Par conséquent, les relations contrainte-déformation d'une couche K dans le système de coordonnées global peuvent être exprimées par la formule suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^f \\ \sigma_{yy}^f \\ \tau_{yz}^f \\ \tau_{xz}^f \\ \sigma_{xy}^f \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{yz}^f \\ \gamma_{xz}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix}^{(k)} \quad f = top, bottom \quad (6)$$

Les coefficients  $Q_{ij}$  sont détaillés par Belarbi (2015). L'âme est considérée comme un matériau composite orthotrope et les relations contrainte-déformation sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{54} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

### 3. Formulation élément fini

L'élément développé est de forme quadrilatère, nommé QSFT52 (Quadrilateral Sandwich First Third with 52-degrees of freedom), défini par quatre nœuds et treize degrés de liberté par nœud (Figure 3).

Chaque nœud contient : deux degrés de liberté de rotation pour chaque peau, six degrés de liberté de rotation aussi pour l'âme, alors que les trois degrés de liberté de type translation sont communes aux trois couche.

Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément est :

$$\delta_i = \{u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}^c, \psi_{yi}^c, \eta_{xi}^c, \eta_{yi}^c, \zeta_{xi}^c, \zeta_{yi}^c, \psi_{xi}^t, \psi_{yi}^t, \psi_{xi}^b, \psi_{yi}^b\}^T$$

#### 3.1 Équation différentielle du mouvement

L'équilibre dynamique de la structure sandwich, en l'absence de charges extérieures, est obtenu en utilisant le principe de Hamilton.

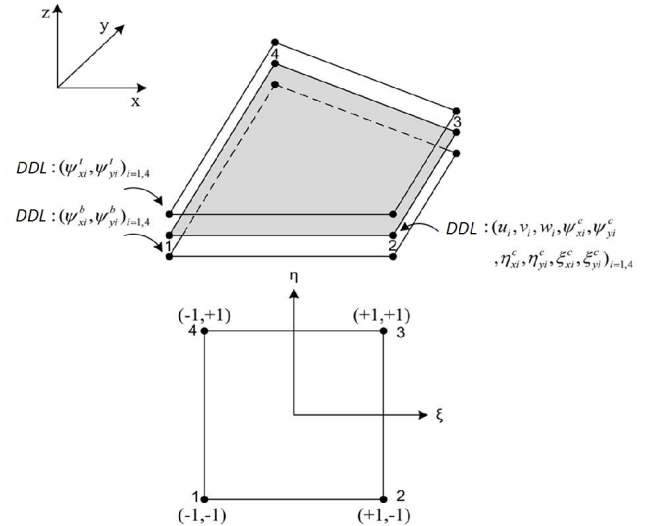


Fig. 3. Géométrie de l'élément QSFT52 et les variables cinématiques nodales correspondantes

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (8)$$

où  $U$  indique l'énergie potentielle totale du système et  $T$  présente l'énergie cinétique totale du sandwich.

Ce qui permet d'obtenir l'équation usuelle suivante :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (9)$$

Où  $K$  est la matrice de rigidité totale de l'élément développé.  $C$ 'est la somme des matrices de rigidités de trois couches :

$$[K] = \sum_c \iint ([B^c]^T [D^c] [B^c] + [B^c]^T [D^c] [B^c] + [B^b]^T [D^b] [B^b]) dx dy \quad (10)$$

Et la matrice de masse totale de l'élément  $[M]$  est définie par la somme des trois matrices de chaque constituant, deux peaux et l'âme (Belarbi 2015).

$$[M] = \sum_c \iint ([N]^T [m^{(a)}] [N] + [N]^T [m^{(c)}] [N] + [N]^T [m^{(b)}] [N]) dx dy \quad (11)$$

Après avoir évalué la matrice de rigidité et la matrice de masse élémentaires, les équations du mouvement pour l'analyse de la vibration libre peuvent être établies sous la forme de problème aux valeurs propres généralisé.

$$[K_T]\{\chi\} - \omega^2 [M_T]\{\chi\} = 0 \quad (12)$$

Où  $\omega$  est la fréquence naturelle associée au mode  $i$ .

### 4. Résultats et discussion

Dans cette section, nous allons évaluer les performances de l'élément développé à travers une série de tests en vibration libre.

**4.1 Plaque sandwich carrée (0/90/C/90/0) simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques**

La convergence de l'élément développé a été étudiée pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques. Les propriétés mécaniques MM1 et MM2 du tableau 1 sont adoptées, respectivement, pour les deux peaux et l'âme. L'épaisseur de l'âme est de  $0.8 h$ , tandis que celle de chaque peau est de  $0.1 h$ , où  $h$  est l'épaisseur totale de la plaque. L'étude a été menée pour deux rapports d'épaisseur ( $a/h = 6.67$  et  $10$ ) avec différents types de maillages ( $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $10 \times 10$ ,  $12 \times 12$  et  $14 \times 14$ ). Les résultats des fréquences propres sont normalisés par la formule suivante :

$$\bar{\omega} = 100 \omega a \sqrt{\frac{\rho_c}{E_{11f}}} \tag{13}$$

Les fréquences propres obtenues pour les six premiers modes sont rapportées dans le tableau 2. La convergence de la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega}_1$ ) est montrée sur la figure 4. Les figures 5 et 6 montrent, respectivement, les six premiers modes d'une plaque sandwich SSSS (simplement appuyée dans les quatre côtés) et CFCF (deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres pour un rapport  $a/h = 10$ ).

**Tableau 1.** Propriétés mécaniques (MM) pour différents plaques sandwichs

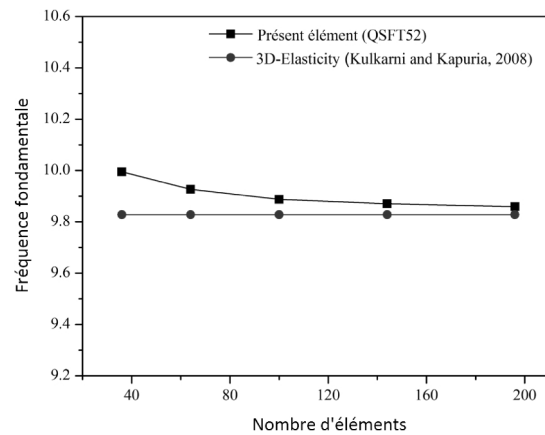
Propriétés mécaniques	Unité	MM1	MM2	MM3	MM4
$E_{11}$	GPa	276.0	0.5776	131.0	0.0069
$E_{22}$	GPa	6.9	0.5776	10.34	0.0069
$G_{12}$	GPa	6.9	0.1079	6.9	0.00344
$G_{13}$	GPa	6.9	0.1079	6.2	0.00344
$G_{23}$	GPa	6.9	0.2221	6.9	0.00345
$V_{12}$	-	0.25	0.0025	0.22	$10^{-5}$
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	681.8	1000	1627	97

Les résultats obtenus par l'élément QSFT52 sont comparés avec la solution d'élasticité-3D de Kulkarni et Kapuria (2008), et avec ceux obtenus par les modèles d'éléments finis de Chakrabarti et Sheikh (2004) et de Kulkarni et Kapuria (2008), basés sur la théorie zig-zag d'ordre supérieur (HZZT).

D'après les résultats qui figurent sur le tableau 2 et la figure 3, on remarque que le modèle d'élément fini développé (QSFT52) donne des résultats très satisfaisants, en termes de stabilité et de rapidité de convergence.

**4.2 Plaque sandwich carrée (0/90/C/0/90) simplement appuyée ayant des peaux stratifiées non-symétriques**

Dans ce test, une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques a été considérée. Les propriétés matérielles MM3 et MM4 du tableau 1 sont adoptées, respectivement, pour les deux peaux et l'âme. Un maillage de  $12 \times 12$  a été adopté.



**Fig.4.** Convergence de la fréquence fondamentale d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ( $a/h=10$ )

**Tableau 2.** Fréquence propre non-dimensionnelle, pour différents modes, d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées symétriques (0/90/C/90/0)

$\frac{a}{h}$	Modes	Présent élément QSFT52					Kulkarni and Kapuria (2008), 3D-Elasticity	Kulkarni and Kapuria (2008), FEM-Q4-TSDT	Chakrabarti and Sheikh (2004), FEM-T6-HZZT
		6x6	8x8	10x10	12x12	14x14			
6.67	1	10.676	10.610	10.579	10.564	10.553	10.524	13.315	10.560
	2	16.873	16.555	16.403	16.329	16.276	16.149	21.561	14.455
	3	19.653	19.247	19.056	18.962	18.904	18.728	23.177	18.735
	4	23.678	23.132	22.878	22.745	22.662	22.434	28.713	20.580
	5	26.192	24.782	24.186	23.867	23.678	23.172	31.140	23.373
	6	31.156	29.696	29.061	28.722	28.502	27.879	34.055	26.165
10	1	9.995	9.927	9.888	9.871	9.859	9.828	12.088	10.051
	2	16.209	15.899	15.756	15.681	15.635	15.505	20.615	14.409
	3	19.000	18.599	18.408	18.310	18.246	18.075	22.152	18.962
	4	22.898	22.365	22.137	21.999	21.927	21.696	27.675	19.424
	5	24.745	23.603	23.089	22.816	22.651	22.202	30.143	21.252
	6	29.503	28.418	27.866	27.861	27.390	26.915	35.329	24.496

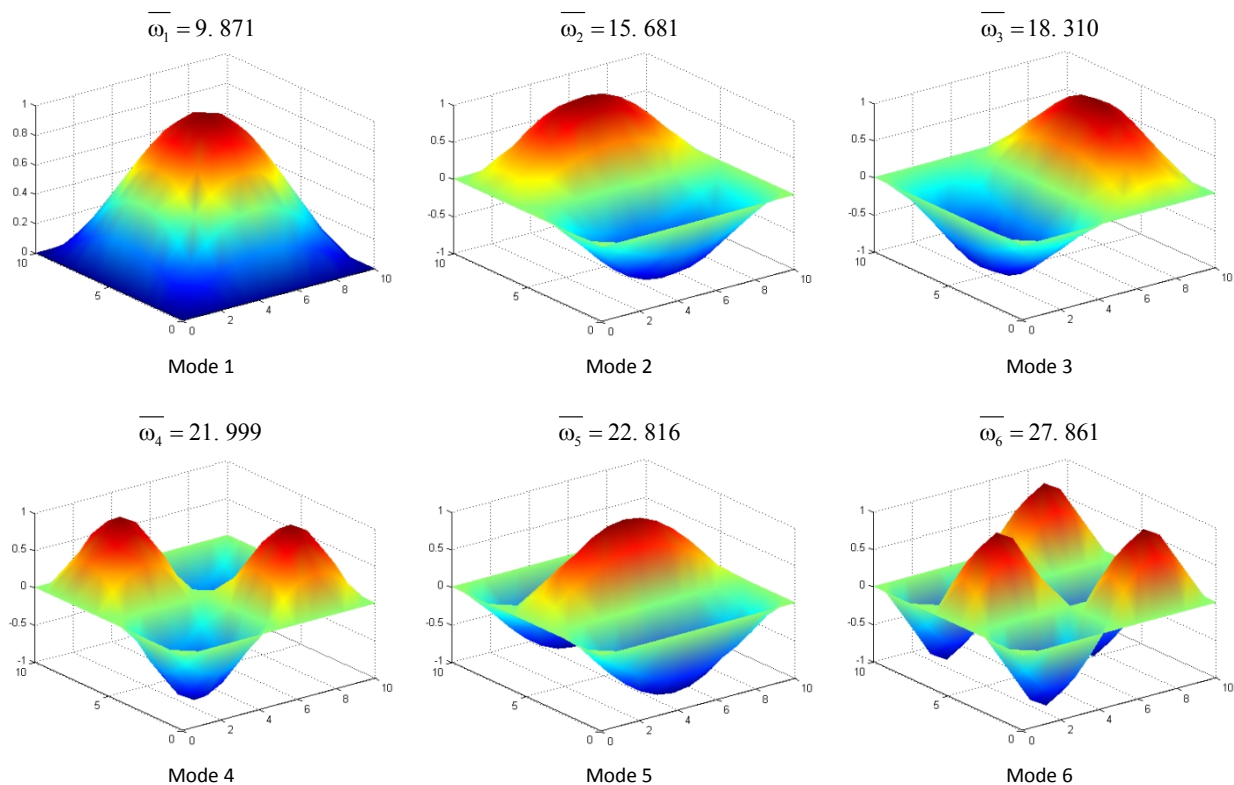


Fig. 5. Six premiers modes d'une plaque sandwich SSSS carrée (0/90/C/90/0), a/h=10

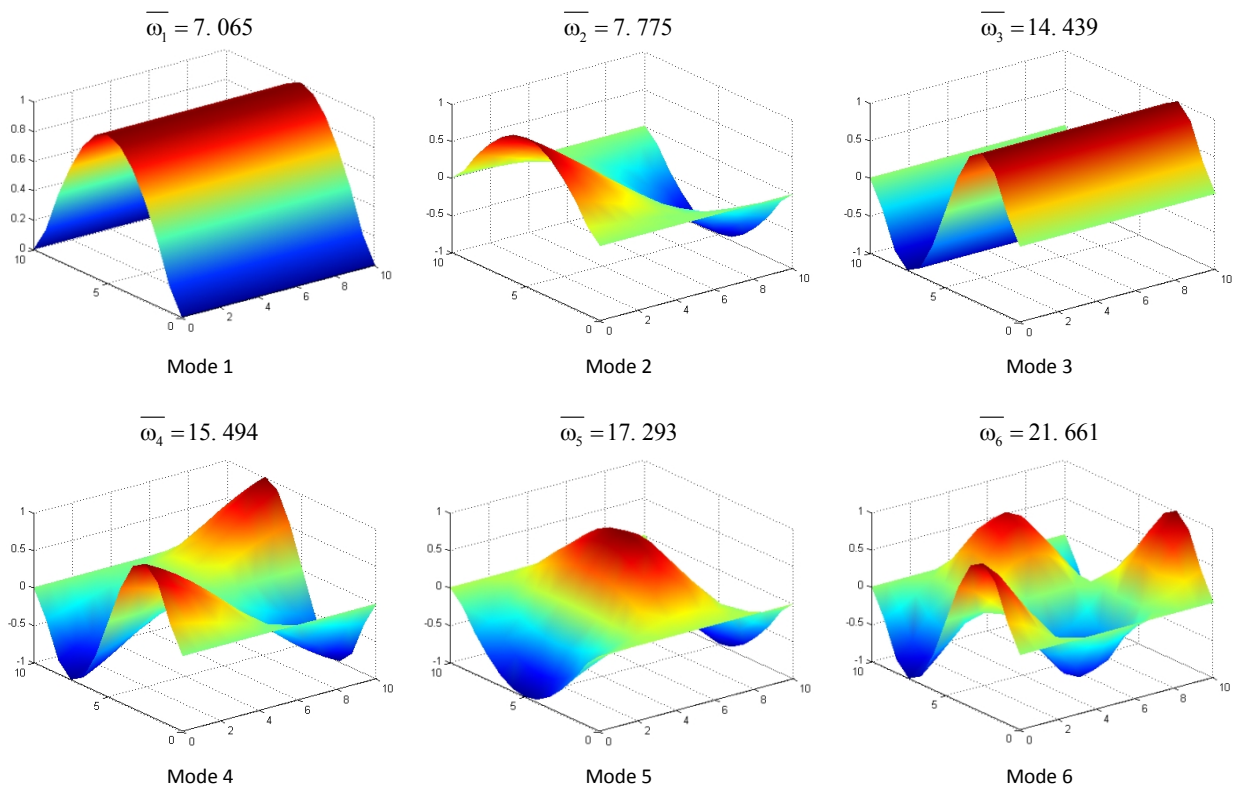


Fig. 6. Six premiers modes d'une plaque sandwich CFCF carrée (0/90/C/90/0), a/h=10.

Les résultats des fréquences propres sont normalisés par la formule suivante :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_{22f}}} \quad (14)$$

Afin d'évaluer la performance de l'élément développé QSFT52 dans l'analyse des vibrations libres des plaques sandwichs minces ou épaisses, différents rapports d'épaisseur variant de 2 à 100 ont été considérés. Les résultats des fréquences propres obtenus par le présent élément sont rapportés dans le tableau 3 avec ceux de la littérature (solutions analytique et des modèles EF basés sur des théories différentes). D'après ce tableau, on peut noter que notre élément se comporte bien, que ce soit en plaques sandwichs, minces ou épaisses.

D'autre part, la même plaque sandwich a été analysée pour différents rapports  $h_c/h_f$  (c'est le rapport entre l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur des peaux). On peut constater, d'après la figure 7, que les résultats obtenus par l'élément développé QSFT52 sont en excellent accord avec ceux obtenus par les solutions de références : solution analytique donnée par Rao et al. 2004), modèle élément fini Q8 de Zhen et al. (2010) basé sur la théorie globale-locale (GLHSDT) et des résultats analytique de Kant and Swaminathan (2001).

Afin de vérifier l'applicabilité de l'élément développé QSFT52 dans l'analyse des vibrations libres des plaques sandwichs aux formes rectangulaires, la même plaque sandwich a été analysée pour différents rapports d'aspect. Les premières fréquences propres non-dimensionnelles sont résumées dans le tableau 4 pour le rapport  $a/h=10$  et  $h_c/h_f=10$ . Les résultats obtenus par l'élément QSFT52 montrent et confirment la bonne performance et la robustesse de la formulation proposée dans l'évaluation des fréquences propres des plaques sandwichs

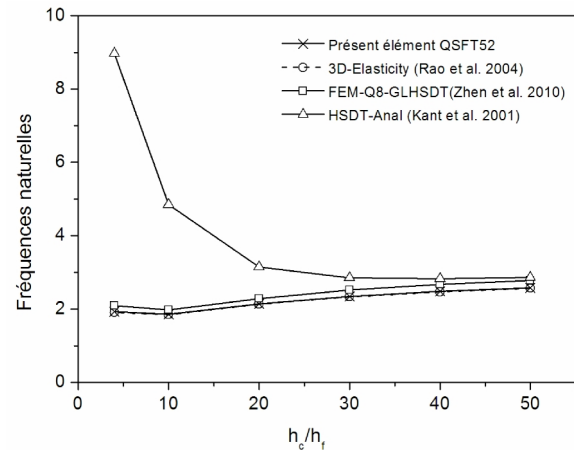


Fig.7 Plaque sandwich carrée simplement appuyée avec des peaux stratifiées (0/90/C/90/0) pour différents rapports ( $h_c/h_f$ ) - Comparaison des fréquences naturelles

Tableau 3. Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'épaisseurs ( $a/h$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques

$\frac{a}{h}$	Présent élément QSFT52	Rao et al. 2004 3D-Elasticity	Sahoo et al. 2014 FEM-Q8-TZTT	Zhen et al. 2010 FEM-Q8-GLHSDT	Kant et al. 2001 HSDT-Anal
2	0.7192	0.7141	0.7170	0.7368	1.1734
4	0.9415	0.9363	0.9461	0.9904	2.0913
10	1.8481	1.8480	1.8789	1.9712	4.8519
20	3.4740	3.4791	3.5231	3.6836	8.5838
30	5.0306	5.0371	5.0976	5.3034	11.0788
40	6.4588	6.4634	6.5356	6.7727	12.6555
50	7.7360	7.7355	7.8148	8.0698	13.6577
60	8.8577	8.8492	8.9318	9.1929	14.3133
70	9.8305	9.8118	9.8946	10.1530	14.7583
80	10.6674	10.6368	10.7176	10.9672	15.0702
90	11.3844	11.3408	11.4180	11.6552	15.2946
100	11.9978	11.9400	12.0131	12.2358	15.4647

Tableau 4 Fréquence fondamentale non-dimensionnelle ( $\bar{\omega}_1$ ) avec différents rapports d'aspects ( $a/b$ ) pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée ayant des peaux composites stratifiées non-symétriques.

$\frac{a}{b}$	Présent élément QSFT52	Rao et al. 2004 3D-Elasticity	Zhen et al. 2010 FEM-Q8-GLHSDT	Kant and Swaminathan 2001 HSDT-Anal
0.5	5.7288	5.7326	6.1069	15.0316
1.0	1.8481	1.8480	1.9712	4.8519
1.5	1.0919	1.0900	1.1644	2.8188
2.0	0.8071	0.8048	0.8584	2.4560
2.5	0.6654	0.6627	0.7045	1.5719
3.0	0.5834	0.5804	0.6145	1.3040
5.0	0.4524	0.4494	0.4676	0.8187

## 5. Conclusion

Dans ce travail, un nouveau modèle d'élément fini quadrilatère, basé sur l'approche *layerwise*, a été développé pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwich multicouches. La performance et l'efficacité de l'élément développé QSFT52 ont été démontrés à travers une série d'applications en vibration libre de plaques composites multicouches et sandwichs. Il est important de mentionner que le modèle EF proposé est de forme simple et présente une excellente précision dans la résolution des problèmes liés à la vibration libre des plaques sandwich stratifiées.

## Références

- Belarbi, M. O. (2015) Éléments finis pour l'analyse des structures sandwichs. Thèse de Doctorat, Département de Génie Civil, Université de Biskra.
- Belarbi, M. O., & A. Tati (2015) A new  $C^0$  finite element model for the analysis of sandwich plates using combined theories. *International Journal of Structural Engineering*, 6(3): 212-239.
- Belarbi M. O, A. Tati, H. Ounis & A. Benchabane (2016) Development of a 2D isoparametric finite element model based on the layerwise approach for the bending analysis of sandwich plates. *Structural Engineering and Mechanics* 57(3): 473-506.
- Chakrabarti, A. & A.H. Sheikh (2004) Vibration of laminate-faced sandwich plate by a new refined element, *Journal of Aerospace Engineering*, 17 (3): 123-134.
- Kant, T. & K. Swaminathan (2001) Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. *Composite Structures* 53(1): 73-85.
- Kulkarni, S.D. & S. Kapuria (2008) Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory. *Computational Mechanics*, 42 (6): 803-824.
- Khechai, A., A. Tati & A. Guettala (2014) Finite element analysis of stress concentrations and failure criteria in composite plates with circular holes. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 9(3): 281-294.
- Linke, M., W. Wohlers & H.-G. Reimerdes (2007) Finite element for the static and stability analysis of sandwich plates. *Journal of sandwich structures and materials* 9(2): 123-142.
- Maturi, D. A., A. J. M. Ferreira, A. M. Zenkour & D. S. Mashat (2014). Analysis of sandwich plates with a new layerwise formulation. *Composites Part B: Engineering* 56(0): 484-489.
- Nabarrete, A., S. F. M. De Almeida & J. S. Hansen (2003) Sandwich-plate vibration analysis: three-layer quasi-three-dimensional finite element model. *AIAA Journal*, 41(8): 1547-1555.
- Nayak, A., S. J. Moy & R. Sheno (2003) Quadrilateral finite elements for multilayer sandwich plates. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 38(5): 377-392.
- Ounis, H., A. Tati & A. Benchabane (2014) Thermal buckling behavior of laminated composite plates: a finite-element study. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 9(1): 41-49.
- Pandey, S. & S. Pradyumna (2015) A new  $C^0$  higher-order layerwise finite element formulation for the analysis of laminated and sandwich plates. *Composite Structures* (131): 1-16.
- Ramesh, S. S., C. Wang, J. Reddy & K. Ang (2009) A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates. *Composite Structures* 91(3): 337-357.
- Ramtekkar, G., Y. Desai & A. Shah (2003) Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate. *Computers & Structures* 81(22): 2183-2198.
- Rao, M., K. Scherbatiuk, Y. Desai & A. Shah (2004) Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates. *Journal of Engineering Mechanics* 130(11): 1268-1278.
- Sahoo, R. & B. Singh (2014) A new trigonometric zigzag theory for buckling and free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures* 117: 316-332.
- Zhen, W., C. Wanji & R. Xiaohui (2010) An accurate higher-order theory and  $C^0$  finite element for free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures* 92(6): 1299-1307.