

HYSTERESIS DU RESSAUT HYDRAULIQUE CONTRÔLÉ PAR SEUIL DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

Mohammed KHATTAOUI, Bachir ACHOUR

Université Mohamed Khider, département d'hydraulique
Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur
Laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface -LARHYSS
BP 145 RP, 07000, Biskra, Algérie

RESUME

Une approche théorique est proposée pour le calcul de l'hystérésis d'un ressaut contrôlé par un seuil dénoyé à paroi épaisse dans un canal de section droite rectangulaire où l'écoulement incident est généré par la mise en place d'une vanne de fond et d'un déversoir à forte pente. L'attention est portée sur l'évaluation des nombres de Froude maximum et minimum compatibles avec la présence du ressaut sur le radier du bassin de dissipation d'énergie. Dans le cas de la configuration avec une vanne de fond, le développement théorique montre que ces nombres de Froude sont liés à la hauteur relative du seuil par des relations de troisième ordre dont la résolution est rendue aisée par les fonctions trigonométriques. Pour le cas de la configuration avec déversoir à forte pente, l'étude montre que le nombre de Froude maximal et la hauteur relative des seuils sont définis par une fonction involutive.

ABSTRACT

A theoretical approach is proposed to compute the hysteresis of a controlled hydraulic jump by a broad crested sill in a rectangular channel, when the inflow is generated by a gate and by a standard spillway with an abrupt slope. The attention is focused on the calculation of both maximum and minimum inflow Froude number compatible with the formation of the hydraulic jump in the energy dissipator stilling basin. When the inflow is generated by a gate, the theoretical development shows that the inflow Froude number is linked to the relative sill height by a cubic equation which can be solved using trigonometric functions. When the inflow is generated by a standard spillway with an abrupt slope, the inflow Froude number and the relative sill are well defined by an involutive function.

introduction

Le ressaut hydraulique peut être contrôlé par un seuil continu à paroi épaisse [1,2,3,4] dont l'objectif principal est d'assurer sa formation par l'élévation du plan d'eau aval, de contrôler sa position lors des changements des paramètres de l'écoulement et de contribuer enfin à une meilleure compacité du bassin amortisseur [1,5]. L'étude du ressaut contrôlé a concerné essentiellement le canal rectangulaire [5,6,7,8] en raison sans doute de sa simplicité géométrique et de sa facilité de mise en œuvre. Elle a eu pour but principal de définir la relation fonctionnelle liant les divers paramètres influençant le phénomène. Les principales études connues à l'heure actuelle sont certainement celle de Forster et Skrinde [6] et celle encore plus récente de Achour et Debabèche [2].

Le seuil est considéré comme étant épais lorsque le profil liquide s'y écoulant est presque parallèle au toit du seuil pour peu que la longueur L_0 de celui-ci soit suffisante. La notion de seuil épais est également liée aux caractéristiques de l'écoulement qui le franchit et suivant la classification de Rao et Muralidhar [9], le seuil est considéré comme étant épais lorsque $0,1 \leq (h_2 - s)/L_0 < 0,35$, où h_2 et s désignent respectivement la profondeur de l'écoulement à l'amont immédiat du seuil et la hauteur géométrique de celui-ci.

Au cours de divers essais expérimentaux, il est apparu que le ressaut hydraulique peut rapidement disparaître du bassin amortisseur lorsque le nombre de Froude incident dépasse une valeur limite. Il ne

réapparaît alors que pour un débit, et par conséquent pour un nombre de Froude incident, nettement inférieur à celui pour lequel il existait. Ce phénomène est connu sous le nom d'hystérésis du ressaut hydraulique et n'a fait l'objet d'aucune étude à caractère théorique ou expérimental. Bien que découvert depuis plusieurs années auparavant, l'hystérésis du ressaut hydraulique est de nos jours resté au stade des observations.

La présente étude se propose d'examiner le phénomène sous l'aspect théorique en tentant de définir les divers paramètres mis en jeu. Deux configurations de l'écoulement incident sont considérées. La première est celle où l'écoulement incident est généré par une vanne de fond, tandis que la seconde correspond à un écoulement incident prenant naissance au pied aval d'un déversoir à forte pente.

L'objectif principal de l'étude est de proposer une approche de calcul des nombres de Froude incident maximal et minimal compatibles avec la présence du ressaut hydraulique sur le radier du bassin de dissipation d'énergie.

CONFIGURATION AVEC VANNE DE FOND

Hauteur relative du seuil

La figure 1 montre de manière schématique un ressaut contrôlé, à l'aval d'une vanne de fond, par un seuil dénoyé à paroi épaisse de hauteur s franchi par un écoulement en régime critique de profondeur h_c et de charge totale H_c . La section droite de l'écoulement étant rectangulaire, la charge totale H_c est alors donnée par la relation universellement connue :

$$H_c = \frac{3}{2} h_c$$

(1)

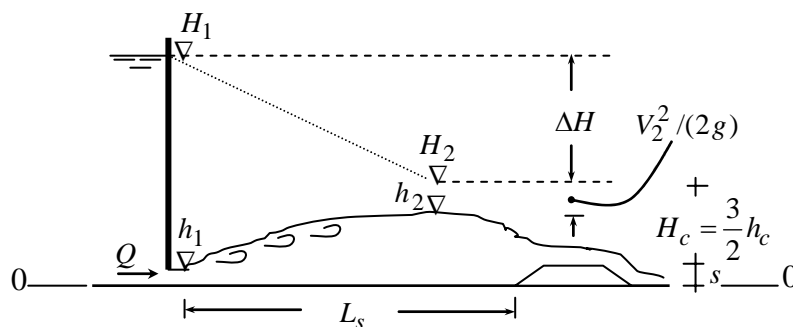


Figure 1: Ressaut contrôlé par un seuil à paroi épaisse à l'aval d'une vanne de fond. Schéma de définition.

Le ressaut est caractérisé par ses hauteurs conjuguées h_1 et h_2 , ainsi que par la perte de charge ΔH qu'il occasionne. Celle-ci est donnée par la différence des charges initiale H_1 et finale H_2 , soit :

$$\Delta H = H_1 - H_2$$

(2)

En considérant le facteur de Coriolis égal à l'unité, les charges H_1 et H_2 s'écrivent respectivement, par rapport au plan de référence 0-0 (Figure 1) :

$$H_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

(3)

$$H_2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

(4)

où V_1 est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la section initiale du ressaut de profondeur h_1 , V_2 est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la section finale du ressaut de profondeur h_2 et g désigne l'accélération de la pesanteur. Si $q = Q/b$ est le débit unitaire, où Q est le débit volume écoulé et b est la largeur du canal considéré, alors les vitesses moyennes V_1 et V_2 s'écrivent respectivement :

$$V_1 = \frac{q}{h_1} \quad (5)$$

$$V_2 = \frac{q}{h_2} \quad (6)$$

En tenant compte des relations (5) et (6), les relations (3) et (4) deviennent :

$$H_1 = h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} \quad (7)$$

$$H_2 = h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2} \quad (8)$$

D'autre part, le débit unitaire q est lié à la profondeur critique h_c par la relation bien connue :

$$q = \sqrt{gh_c^3} \quad (9)$$

Tenant compte de ce résultat, les relations (7) et (8) peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$H_1 = h_1 + \frac{h_c^3}{2h_1^2} \quad (10)$$

$$H_2 = h_2 + \frac{h_c^3}{2h_2^2} \quad (11)$$

En divisant par h_c les deux membres des relations (10) et (11), il vient que :

$$\frac{H_1}{h_c} = \frac{h_1}{h_c} + \frac{h_c^2}{2h_1^2} \quad (12)$$

$$\frac{H_2}{h_c} = \frac{h_2}{h_c} + \frac{h_c^2}{2h_2^2} \quad (13)$$

Désignons les hauteurs relatives $H_1/h_c, H_2/h_c, h_1/h_c$ et h_2/h_c par les paramètres adimensionnels respectifs H_1^*, H_2^*, h_1^* et h_2^* . Ceci permet d'écrire plus simplement les relations (12) et (13) sous la forme :

$$H_1^* = h_1^* + \frac{1}{2h_1^{*2}}$$

(14)

$$H_2^* = h_2^* + \frac{1}{2h_2^{*2}}$$

(15)

En divisant par h_c les deux membres de l'équation (2), nous pouvons écrire que :

$$\Delta H^* = H_1^* - H_2^*$$

(16)

où $\Delta H^* = \Delta H / h_c$.

En se référant à la figure 1, celle-ci permet géométriquement d'écrire que :

$$\Delta H = H_1 - \left(s + \frac{3}{2} h_c \right)$$

(17)

Divisons les deux membres de la relation (17) par h_c . Il vient que :

$$\frac{\Delta H}{h_c} = \frac{H_1}{h_c} - \left(\frac{s}{h_c} + \frac{3}{2} \right)$$

(18)

ou bien :

$$\Delta H^* = H_1^* - \left(\frac{s}{h_c} + \frac{3}{2} \right)$$

(19)

Or, la quantité s/h_c peut également s'écrire :

$$\frac{s}{h_c} = \frac{h_1}{h_c} \times \frac{s}{h_1} = h_1^* S$$

où $S = s/h_1$ est la hauteur relative du seuil. Ainsi, la relation (19) s'écrit :

$$\Delta H^* = H_1^* - \left(h_1^* S + \frac{3}{2} \right)$$

soit :

$$S = \frac{H_1^* - \Delta H^* - 3/2}{h_1^*}$$

(20)

En tenant compte de la relation (16), l'équation (20) peut également s'écrire :

$$S = \frac{H_2^* - 3/2}{h_1^*}$$

(21)

où la charge totale relative H_2^* est donnée par la relation (15). Ainsi, la relation (21) peut alors s'écrire :

$$S = \frac{h_2^*}{h_1^*} + \frac{1}{2h_2^{*2}h_1^*} - \frac{3}{2h_1^*}$$

(22)

Selon Achour [1], la hauteur relative finale h_2^* du ressaut est liée à sa hauteur relative initiale h_1^* par la relation :

$$h_2^* = \sqrt{\left(h_1^*/2\right)^2 + 2/h_1^*} - h_1^*/2$$

(23)

Notons qu'en vertu du caractère torrentiel de l'écoulement incident, la profondeur initiale h_1 est inférieure à la profondeur critique h_c et que compte tenu du caractère fluvial de l'écoulement dans la section finale du ressaut, la profondeur h_2 est supérieure à la profondeur critique h_c . Ceci permet de conclure que les paramètres adimensionnels h_1^* et h_2^* sont respectivement inférieur et supérieur à l'unité.

Lors des applications pratiques, l'un des paramètres connus du problème est la profondeur relative initiale h_1^* , tandis que h_2^* est le paramètre à rechercher. Celui-ci est alors donné par la relation (23). Bien que cette relation soit explicite, il est possible de la présenter sous une forme plus simple, après avoir représenté graphiquement, dans un système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes, la variation du rapport h_2^*/h_1^* en fonction de la quantité $h_1^{*-3/2}$.

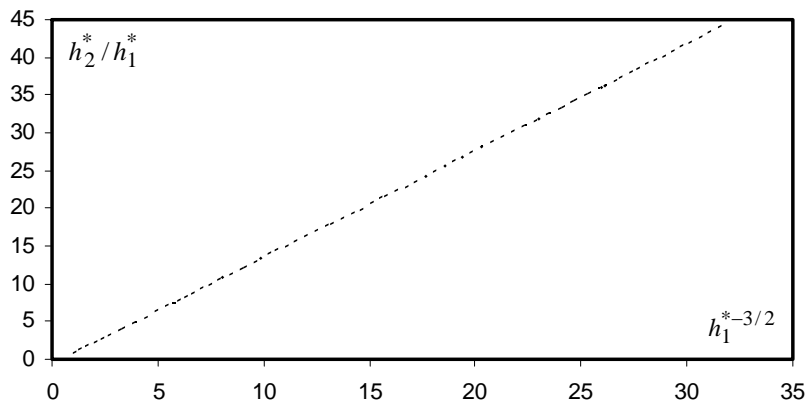


Figure 2 : Variation de h_2^*/h_1^* en fonction de $h_1^{*-3/2}$, selon la relation (23)

La courbe obtenue (figure 2) est quasi linéaire et peut être traduite par la relation :

$$\frac{h_2^*}{h_1^*} \cong \sqrt{2} h_1^{*-3/2} - \frac{1}{2}$$

(24)

Cette dernière relation permet aisément d'écrire que :

$$h_2^* \cong \frac{\sqrt{2}}{h_1^{*1/2}} - \frac{h_1^*}{2}$$

(25)

En substituant la relation (25) dans la relation (22), celle-ci devient :

$$S = \frac{\sqrt{2}}{h_1^{*3/2}} - \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{h_1^{*1/2}} - \frac{h_1^*}{2}\right)^{-2}}{2h_1^*} - \frac{3}{2h_1^*}$$

(26)

La relation (26) révèle que la hauteur relative $S = s/h_1$ du seuil n'est fonction que de la hauteur relative h_1^* de l'écoulement incident.

Nombre de Froude incident maximal

Dans sa configuration représentée par la figure 1, le ressaut hydraulique est dans sa position extrême correspondant à une hauteur maximale du seuil $s = s_M$ et pour le débit volume écoulé $Q = Q_M$. Si le débit Q venait à dépasser la valeur Q_M , le ressaut se déplacerait vers l'aval et disparaîtrait du bassin en laissant place à un écoulement torrentiel. Pour la même valeur de la hauteur relative S du seuil, l'expérience montre que la réapparition du ressaut dans sa position initiale ne peut se faire que pour un débit volume très inférieur à la valeur Q_M . Ce phénomène est connu sous le nom de l'hystérésis du ressaut que de nombreuses expériences ont pu mettre en évidence. Cependant, aucun développement théorique n'a pu être proposé par le passé pour définir la relation fonctionnelle liant les divers paramètres mis en jeu dans ce phénomène.

En pratique, l'un des problèmes que l'on peut rencontrer est celui de déterminer la profondeur relative initiale h_1^* correspondant à la position extrême du ressaut et au débit volume Q_M . Cela revient à évaluer le nombre de Froude incident maximal $F_{1,M}$ compatible avec la présence du ressaut dans sa configuration représentée sur la figure 1. Ce problème trouve sa solution en résolvant l'équation (26), à condition que la hauteur relative S du seuil soit connue. Après simplifications et réarrangements, la relation (26) s'écrit :

$$\left[S + \frac{1}{2} - 2(2\sqrt{2} - h_1^{*3/2})^{-2} \right] h_1^{*3/2} + \frac{3}{2} h_1^{*1/2} - \sqrt{2} = 0$$

(27)

Posons :

$$\zeta = 2(2\sqrt{2} - h_1^{*3/2})^{-2}$$

(28)

La relation (27) devient alors :

$$\left(S + \frac{1}{2} - \zeta \right) h_1^{*3/2} + \frac{3}{2} h_1^{*1/2} - \sqrt{2} = 0$$

(29)

Le paramètre adimensionnel ζ n'est fonction que de la hauteur relative h_1^* dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Cependant, pour l'ensemble des applications pratiques, nous pouvons affirmer que h_1^* varie dans la gamme $0,20 \leq h_1^* \leq 0,40$. Nous pouvons ainsi admettre que $h_1^{*3/2} \square 2\sqrt{2}$ et que $\zeta \approx 2(2\sqrt{2})^{-2} = 1/4$. Par suite, la relation (24) devient :

$$\left(S + \frac{1}{4} \right) h_1^{*3/2} + \frac{3}{2} h_1^{*1/2} - \sqrt{2} = 0$$

(30)

L'approximation que nous avons adoptée sur la valeur de ζ entraîne une erreur relative très acceptable sur la valeur de la hauteur relative du seuil S , calculée selon la relation (30). En comparant les relations (29) et (30), pour la même valeur de la hauteur relative h_1^* prise dans la gamme pratique, nous pouvons montrer que l'erreur relative commise sur la valeur de S dépend de celle de h_1^* , mais reste inférieure à la valeur maximale 3,14% obtenue pour la plus grande valeur $h_1^* = 0,40$. Le calcul montre que dans la

gamme $0,20 \leq h_1^* \leq 0,40$, l'erreur relative $\Delta S/S$ est telle que $0,2\% \leq \Delta S/S \leq 3,14\%$. Si S_e est la valeur exacte de la hauteur relative du seuil S calculée selon la relation (29) et que S_a est la valeur approchée de S calculée selon la relation (30), la courbe de la figure 3 montre clairement que les points $S_a(S_e)$ se situent quasiment sur la première bissectrice d'équation $S_a = S_e$ et représentée en trait discontinu.

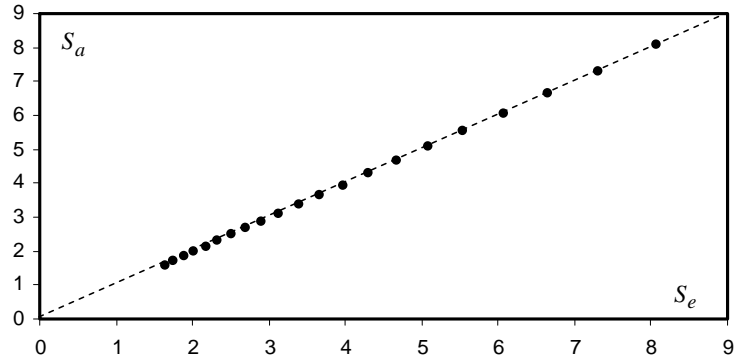


Figure 3 : Variation des hauteurs relatives approchée S_a et exacte S_e , calculées selon les relations (29) et (30) respectivement. (- - -) première bissectrice.

En posant $X = h_1^{*1/2}$, la relation (30) s'écrit :

$$\left(S + \frac{1}{4}\right)X^3 + \frac{3}{2}X - \sqrt{2} = 0$$

ou bien :

$$X^3 + \frac{3}{2\left(S + \frac{1}{4}\right)}X - \frac{\sqrt{2}}{\left(S + \frac{1}{4}\right)} = 0$$

(31)

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en X , sans terme du second ordre, de la forme :

$$X^3 + rX - t = 0$$

(32)

où :

$$r = \frac{3}{2(S+1/4)} ; t = \frac{\sqrt{2}}{(S+1/4)}$$

Le discriminant de l'équation (32) est :

$$\Delta = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^3$$

soit :

$$\Delta = \frac{2S+1}{4(S+1/4)^3}$$

Puisque $S \geq 0$, le discriminant Δ est par suite strictement positif. La racine réelle de l'équation (32) est alors :

$$X = 2\sqrt{\frac{r}{3}}sh(\beta/3)$$

ou bien :

$$X = \sqrt{\frac{2}{S+1/4}} sh(\beta/3)$$

L'angle β est tel que :

$$sh(\beta) = \frac{3t}{2\sqrt{r^3/3}} = 2\sqrt{S+1/4}$$

soit :

$$\beta = \arg sh\left(2\sqrt{S+1/4}\right)$$

En tenant compte du changement de variables que nous avons adopté, soit $X = h_1^{*1/2}$, il vient que :

$$h_1^* = \frac{2sh^2(\beta/3)}{S+1/4}$$

(33)

Exemple d'application 1

Il s'agit de déterminer, pour une hauteur relative de seuil $S = 3,938$, la valeur du nombre de Froude maximal $F_{1,M}$ à ne pas dépasser pour que le ressaut hydraulique soit dans la configuration représentée par la figure 1.

i. Pour $S = 3,938$, l'angle β est :

$$\beta = \arg sh\left(2\sqrt{S+1/4}\right) = \arg sh\left(2 \times \sqrt{3,938+1/4}\right) = 2,1170061913 \text{ radians}$$

ii. Selon la relation (33), la profondeur relative maximale $h_{1,M}$ est :

$$h_{1,M}^* = \frac{2sh^2(\beta/3)}{S+1/4} = \frac{2 \times sh^2(2,1170061913/3)}{3,938+1/4} = 0,279996922 \approx 0,28$$

iii. Dans le cas d'un canal de section droite rectangulaire, le nombre de Froude incident F_1 s'écrit :

$$F_1 = \sqrt{\frac{q^2}{gh_1^3}}$$

En tenant compte de la relation (9) il vient que :

$$F_1 = \sqrt{\frac{h_c^3}{h_1^3}} = h_1^{*-3/2}$$

Ainsi :

$$F_{1,M} = h_{1,M}^{*-3/2} = 0,28^{-3/2} = 6,74936559 \approx 6,75$$

Nombre de Froude incident minimal de réapparition du ressaut

Lorsque le nombre de Froude incident F_1 dépasse la valeur maximale $F_{1,M}$ compatible avec la présence du ressaut sur le bassin amortisseur représenté par la figure 1, le ressaut se déplace progressivement vers l'aval pour enfin complètement disparaître. Pour faire réapparaître le ressaut, il est nécessaire de diminuer le débit volume Q , pour la même valeur de la hauteur s du seuil.

A la limite de la réapparition du ressaut, la perte de charge ΔH peut être considérée comme étant insignifiante, ce qui permet d'écrire d'un point de vue théorique que $\Delta H \rightarrow 0$. Par suite, la perte de charge relative ΔH^* est également nulle et la relation (20) devient :

$$S = \frac{H_1^* - 3/2}{h_1^*}$$

(34)

A la hauteur relative initiale h_1^* figurant dans la relation (34) est associé le nombre de Froude incident minimal $F_{1,m}$ de réapparition du ressaut. En considérant la relation (14) qui demeure en vigueur, l'équation (34) s'écrit :

$$S = 1 + \frac{1}{2h_1^{*3}} - \frac{3}{2h_1^*}$$

ou bien :

$$h_1^{*3} + \frac{3h_1^{*2}}{2(S-1)} - \frac{1}{2(S-1)} = 0$$

(35)

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en h_1^* de la forme :

$$h_1^{*3} + ah_1^{*2} + bh_1^* + c = 0$$

avec : $a = \frac{3}{2(S-1)}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{2(S-1)}$

En substituant $h_1^* = x - a/3$, nous obtenons une équation de troisième degré d'un type simplifié, sans terme du second ordre, de la forme :

$$x^3 - rx + t = 0$$

(36)

où :

$$r = b - a^2/3 = \frac{3}{4(S-1)^2}, \quad t = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{1 - 2(S-1)^2}{4(S-1)^3}$$

Le discriminant de l'équation (36) est alors :

$$\Delta = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^3 = \frac{S(S-2)}{16(S-1)^4}$$

Ainsi, selon la gamme de valeurs de la hauteur relative S du seuil, le discriminant Δ peut être négatif, nul ou positif. Une étude particulière du discriminant Δ , et par suite des équations (35) et (36) a montré que pour :

1. $0 < S < 1$, le discriminant Δ est négatif et la racine réelle de l'équation (35) est alors :

$$h_1^* = \frac{\cos(\beta + 60^\circ) - 1/2}{S - 1}$$

(37)

2. $1 < S \leq 2$, le discriminant le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de l'équation (35) est :

$$h_1^* = \frac{\cos(\beta - 60^\circ) - 1/2}{S - 1}$$

(38)

Précisons que l'angle β figurant dans les relations (37) et (38) est tel que :

$$\beta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[1 - 2(S-1)^2 \right]$$

(39)

3. $S > 2$, le discriminant Δ est positif et la racine réelle de l'équation (35) est :

$$h_1^* = \frac{ch(\alpha) - 1/2}{S - 1}$$

(40)

où l'angle α est tel que :

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{Argch} \left[2(S-1)^2 - 1 \right]$$

(41)

La profondeur relative h_1^* donnée par les équations (37), (38) et (40) correspondant au fait à la profondeur relative minimale $h_{1,m}^*$ à laquelle il faut associer le nombre de Froude minimale $F_{1,m}$ de réapparition du ressaut et tel que $F_{1,m} = h_{1,m}^{*-3/2}$.

Exemple d'application 2

Reprenons l'exemple d'application 1 et déterminons, pour la même valeur de la hauteur relative du seuil, la valeur du nombre de Froude minimal de réapparition du ressaut hydraulique.

iv. La hauteur relative du seuil $S = 3,938$ étant supérieure à 2, la profondeur relative $h_{1,m}^*$ doit être alors calculée par application simultanée des relations (40) et (41). Selon cette dernière, l'angle α est :

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{Argch} \left[2(S-1)^2 - 1 \right] = \frac{1}{3} \times \text{Argch} \left[2 \times (3,938 - 1)^2 - 1 \right] = 1,16037853 \text{ radians}$$

Par suite, la profondeur relative $h_{1,m}^*$ est :

$$h_{1,m}^* = \frac{ch(\alpha) - 1/2}{S - 1} = \frac{ch(1,16037853) - 1/2}{3,938 - 1} = 0,42622677$$

v. Le nombre de Froude minimal recherché est alors :

$$F_{1,m} = h_{1,m}^{*-3/2} = 0,42622677^{-3/2} = 3,593675932 \approx 3,6$$

Notons ainsi que le ressaut hydraulique, représenté par la figure 1, disparaît du radier du bassin lorsque le nombre de Froude incident dépasse la valeur $F_{1,M} \approx 6,75$ et ne réapparaît que pour une valeur du nombre de Froude incident $F_{1,m} \approx 3,6$, très inférieure à $F_{1,M}$.

CONFIGURATION AVEC DEVERSOIR A FORTE PENTE

Nombre de Froude maximal compatible avec la présence du ressaut

La figure 4 montre un ressaut contrôlé par un seuil dénoyé à paroi épaisse de hauteur géométrique s_2 . L'écoulement incident est généré par un déversoir à forte pente de hauteur s_1 . Le déversoir et le seuil sont franchis par un écoulement en régime critique de profondeur h_c et de charge totale H_c . Le ressaut est dans sa position extrême correspondant à la valeur maximale $F_{1,M}$.

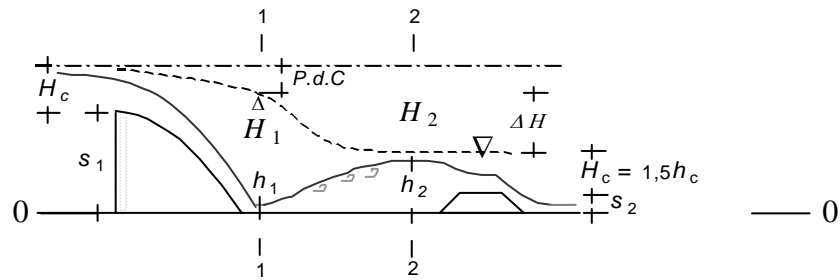


Figure 4: Ressaut contrôlé par un seuil à paroi épaisse à l'aval d'un déversoir.
 Schéma de définition. *P.d.C* = Pertes de charge par frottement.

En négligeant les pertes de charge par frottement le long du parement aval du déversoir de hauteur s_1 , la figure 4 permet géométriquement d'écrire, par rapport au plan de référence 0-0, que :

$$H_1 = s_1 + \frac{3}{2}h_c \quad (42)$$

$$H_2 = s_2 + \frac{3}{2}h_c \quad (43)$$

La perte de charge ΔH occasionnée par le ressaut est par suite :

$$\Delta H = H_1 - H_2 = s_1 - s_2 \quad (44)$$

Posons :

$$\Delta s = s_1 - s_2 \quad (45)$$

Il vient que :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1} \quad (46)$$

ou bien, en tenant compte de la relation (44) :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta H}{s_1} \quad (47)$$

Or, la relation (42) permet d'écrire que :

$$s_1 = H_1 - \frac{3}{2}h_c$$

La relation (47) peut alors s'écrire :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta H}{H_1 - 3h_c/2} \quad (48)$$

Cette dernière relation peut également se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta H/h_c}{H_1/h_c - 3/2} \quad (49)$$

Puisque $\Delta H/h_c = \Delta H^*$ et que $H_1/h_c = H_1^*$, alors la relation (49) peut prendre la forme définitive suivante :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta H^*}{H_1^* - 3/2}$$

(50)

Etant donné que les relations (14), (15), (16) et (23) demeurent particulièrement en vigueur, la relation (50) révèle que le paramètre $\Delta s/s_1$ n'est fonction que de la profondeur relative h_1^* . Celle-ci correspond en fait à la hauteur relative maximale comptable avec la présence du ressaut, dans sa configuration représentée par la figure 4. A cette profondeur relative maximale est associée le nombre de Froude maximale $F_{1,M}$. Si le nombre de Froude incident venait à dépasser la valeur de $F_{1,M}$, le ressaut se déplacerait alors vers l'aval pour disparaître en laissant place à un écoulement de nature torrentielle. En raison de cette nature, la valeur de h_1^* varie dans la gamme $]0,1[$. La variation de $\Delta s/s_1$ en fonction de h_1^* est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes de la figure 5.

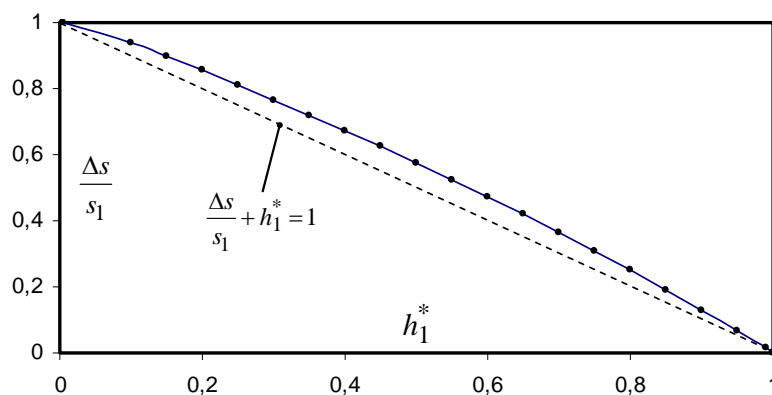


Figure 5 : Variation de $\Delta s/s_1$ en fonction de h_1^* .

(—●—) courbe tracée selon la relation (50). (- -) seconde bissectrice.

La figure 5 montre clairement que :

1. lorsque $h_1^* \rightarrow 1$, alors $\Delta s/s_1 \rightarrow 0$
2. lorsque $h_1^* \rightarrow 0$, alors $\Delta s/s_1 \rightarrow 1$
3. la courbe représentant la variation de $\Delta s/s_1 = f(h_1^*)$ se situe au-dessus de la seconde bissectrice d'équation $\Delta s/s_1 + h_1^* = 1$

En outre, une étude particulière de la relation (50) a permis d'écrire que :

1. $(\Delta s/s_1)^m + h_1^{*n} = 1$, avec $m > 1$ et $n > 1$
2. $(\Delta s/s_1)_i = f\left[(h_1^*)_j\right]$ et $(h_1^*)_j = f\left[(\Delta s/s_1)_i\right]$. Ceci permet de conclure que la fonction f est involutive et que $m = n$.
3. les exposants m et n sont tels que $m = n \approx 9/8$

Ainsi, nous pouvons aisément écrire que :

$$(\Delta s / s_1)^{9/8} + h_1^{*9/8} = 1$$

(51)

Rappelons que la profondeur relative h_1^* figurant dans la relation (51) correspond en fait à $h_{1,M}^*$ et au nombre de Froude maximal $F_{1,M}$ tel que $F_{1,M} = h_{1,M}^{*-3/2}$. La relation (51) peut donc s'écrire :

$$(\Delta s / s_1)^{9/8} + F_{1,M}^{-3/4} = 1$$

(52)

En pratique, les paramètres connus du problème sont les hauteurs des seuils s_1 et s_2 , tandis que le paramètre à rechercher est le nombre de Froude maximal $F_{1,M}$ compatible avec la présence du ressaut dans le bassin représenté par la figure 4. Le problème trouve donc sa solution par application de la relation explicite (52) que nous recommandons cependant de n'utiliser que lorsque $\Delta s / s_1 \geq 0,6$.

Exemple d'application 3

L'ouvrage de dissipation d'énergie représenté par la figure 4 est caractérisé par des hauteurs de seuils $s_1 = 14 \text{ m}$ et $s_2 = 2,6 \text{ m}$. Déterminer le nombre de Froude maximal compatible avec la présence du ressaut sur le bassin.

i. Les seuils sont tels que :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1} = \frac{14 - 2,6}{14} = 0,81428571$$

ii. La relation (52) permet de déduire que :

$$F_{1,M} = \left[1 - (\Delta s / s_1)^{9/8} \right]^{-4/3} = \left(1 - 0,81428571^{9/8} \right)^{-4/3} \approx 8,2$$

iii. Les calculs peuvent être vérifiés en ayant recours à la relation exacte (50). Les paramètres suivants doivent être d'abord déterminés :

- La profondeur relative h_1^* telle que : $h_1^* = F_{1,M}^{-2/3} = 8,2^{-2/3} = 0,24591825$

- La profondeur relative h_2^* telle que, selon la relation (23) :

$$h_2^* = \sqrt{(0,24591825/2)^2 + 2/0,24591825} - 0,24591825/2 = 2,73149403 \text{ m}$$

- La charge totale relative H_1^* telle que, selon la relation (14) :

$$H_1^* = h_1^* + \frac{1}{2h_1^{*2}} = 0,24591825 + \frac{1}{2 \times 0,24591825^2} = 8,51368992$$

- La charge totale relative H_2^* telle que, selon la relation (15) :

$$H_2^* = h_2^* + \frac{1}{2h_2^{*2}} = 2,73149403 + \frac{1}{2 \times 2,73149403^2} = 2,79850864$$

- La perte de charge relative ΔH^* telle que, selon la relation (16) :

$$\Delta H^* = H_1^* - H_2^* = 8,51368992 - 2,79850864 = 5,71518128$$

Ainsi, selon la relation (50), le paramètre adimensionnel $\Delta s / s_1$ serait égal à :

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta H^*}{H_1^* - 3/2} = \frac{5,71518128}{8,51368992 - 3/2} = 0,81486084 \approx 0,815$$

Il s'agit pratiquement, avec une erreur relative inférieure 0,71%, de la même valeur de $\Delta s / s_1$ déterminée à l'étape *i*.

CONCLUSION

L'étude a été consacrée au phénomène de l'hystérésis du ressaut hydraulique, contrôlé par un seuil à paroi épaisse dans un canal rectangulaire de pente nulle. Deux configurations de l'écoulement ont été considérées. La première correspond à un écoulement incident généré par la mise en place d'une vanne de fond, tandis que la seconde est celle qui correspond à un écoulement incident provoqué par un déversoir standard à forte pente aval.

L'objectif principal a été d'établir une approche théorique visant à définir la relation fonctionnelle liant les divers paramètres mis en jeu.

Pour le cas de la configuration avec vanne de fond, l'étude a pu établir des relations adimensionnelles destinées au calcul de la hauteur relatif du seuil et des nombres de Froude incidents maximal et minimal, compatibles avec la présence du ressaut sur le bassin de dissipation d'énergie. Les relations obtenues sont de troisième ordre et dont la résolution a été possible en faisant appel aux fonctions trigonométriques.

Pour le cas de la configuration avec déversoir standard à forte pente aval, il a été clairement établi que la profondeur relative de l'écoulement incident est liée au à la hauteur relative des seuils par une fonction involutive.

Des exemples d'application ont été proposés pour mieux préciser les diverses étapes du calcul.

PRINCIPALES NOTATIONS

F_1	nombre de Froude incident	(-)
$F_{1,m}$	nombre de Froude incident minimal	(-)
$F_{1,M}$	nombre de Froude incident maximal	(-)
g	accélération de la pesanteur	(ms^{-2})
h_1	profondeur initiale de l'écoulement	(m)
h_2	profondeur finale de l'écoulement	(m)
h_c	profondeur critique	(m)
h_1^*	profondeur relative initiale	(-)
$h_{1,M}^*$	profondeur relative initiale maximale	(-)
$h_{1,m}^*$	profondeur relative initiale minimale	(-)
h_2^*	profondeur relative finale	(-)
H_1	charge totale initiale	(m)
H_2	charge totale finale	(m)
H_1^*	charge totale relative initiale	(-)
H_2^*	charge totale relative finale	(-)
Q	débit volume	(m^3s^{-1})
q	débit unitaire	(m^2s^{-1})
s	hauteur de seuil	(m)
S	hauteur relative de seuil	(-)
V_1	vitesse moyenne de l'écoulement incident	(ms^{-1})
V_2	vitesse moyenne de l'écoulement aval	(ms^{-1})

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Achour B. (1997). Dissipateurs d'énergie par ressaut, Thèse de Doctorat d'état en sciences hydrauliques, Institut de génie-civil, Université de Tizi-Ouzou, Algérie.
- [2] Achour B., Debabèche M. (2003). Ressaut contrôlé par seuil dans un canal profilé en U, *J. Hydr. Research*, 41(1), 97-103.
- [3] Achour B., Debabèche M. (2003). Control of hydraulic jump by sill in a triangular channel, *J. Hydr. Research*, 41(3), 319-325.
- [4] Debabèche M., Achour B. (2007). Effect of sill in a triangular channel, *J. Hydr. Research*, 45(1), 135-139.
- [5] Hager W.H., Li D. (1992). Dissipateurs d'énergie contrôlés par seuil, *J. Hydr. Research*, 30(2), 165-181.
- [6] Forster J.W., Skrinde R.A. (1950). Control of hydraulic jump by sills, *Trans. ASCE*, 115, 973-1022.
- [7] Bradley J.N., Peterka A.J. (1957). The hydraulic design of stilling basins: Hydraulic jumps on a horizontal apron, paper 1401, *Proc. ASCE, J. Hyd. Div.*, Vol. 83, 61-78.
- [9] Rao N.S.G., Muralidhar D. (1963). Discharge characteristics of weirs of limit crest width, *La houille Blanche*, Vol. 18, 537-545.